



Technische Universität Ilmenau

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Fachgebiet Analysis und Systemtheorie

Fehlerschranken bei symbolischer Approximation von DAEs

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science

Stefan Brechtken

Betreuer: Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Stephan Trenn

Verantwortlicher Hochschullehrer:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Achim Ilchmann,
FG Analysis und Systemtheorie

Ilmenau, 05. Februar 2009

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mir während der Anfertigung dieser Arbeit, insbesondere durch das Korrekturlesen, geholfen haben. Ein besonderer Dank geht an Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Stephan Trenn, der mir immer mit vielen hilfreichen Ratschlägen zur Seite stand. Außerdem möchte ich Prof. Dr. Achim Ilchmann sowie Prof. Dr. Ralf Sommer für die Ermöglichung dieser Arbeit danken.

Erklärung: „Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle von mir aus anderen Veröffentlichungen übernommenen Passagen sind als solche gekennzeichnet.“

Ilmenau, 05.02.2009

.....
Stefan Brechtken

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Laplace-Transformation und Hardy-Räume	7
2.1	Lebesgue-Theorie	7
2.2	Laplace-Theorie	10
2.3	Hardy-Räume	21
2.4	Differentialalgebraische Gleichungen	23
3	Approximation der Lösungen von DAEs	25
3.1	Methode der symbolischen Approximation	25
3.2	Fehlerabschätzungen	26
3.3	Akademisches Beispiel	31
3.3.1	Lösung des ungestörten Systems	31
3.3.2	Polynomiale Störung des Systems	33
3.3.3	Konstante Störung des Systems	37
3.4	Reales Beispiel	38
3.5	Ausblick	43
	Literaturverzeichnis	44

Notationen

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	die natürlichen, reellen und komplexen Zahlen
$i\mathbb{R}$	die rein imaginären Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq \alpha}, \mathbb{R}_{> \alpha}$	$\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq \alpha \text{ alpha} \in \mathbb{R}\}, \{r \in \mathbb{R} \mid r > \alpha \text{ alpha} \in \mathbb{R}\}$
$\Re(s), \Im(s)$	der Real- bzw. Imaginärteil der Komplexen Zahl s
$\mathbb{C}_{\Re > \alpha}$	$\mathbb{C}_{\Re > \alpha} := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$, also eine offene rechte Halbebene
\mathbb{C}^n	das n -fache kartesische Produkt über \mathbb{C}
$\mathbb{R}^n[t]$	Polynome mit Koeffizienten aus \mathbb{R}^n
$\ \cdot\ _p$	die p -Norm auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n , entsprechend 2.1.1 i)
$\ \cdot\ $	eine beliebige p -Norm auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n
$C^n(A \rightarrow B)$	der Raum der n mal stetig differenzierbaren Funktionen, die von A nach B abbilden, $n \in \mathbb{N}$
$L_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$	die Lebesgue-Räume, entsprechend 2.1.3
$H_p(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n)$	die Hardy-Räume, entsprechend 2.3.1
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	die Laplace-Transformation, entsprechend 2.2
$G(f)$	die größte offene Halbebene in \mathbb{C} , auf der $\mathcal{L}\{f\}$ existiert
$\text{ess sup}(f)$	das essentielle Supremum, entsprechend 2.1.1 v)
$f(a^+)$	$:= \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$, der rechtsseitige Grenzwert von f im Punkt a
e_i	$:= (0 \dots 0 \overset{i-1}{1} \overset{i}{0} \overset{i+1}{\dots} \overset{n}{0})^T$, der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^n

Im Rahmen dieser Arbeit bezeichnen, im Allgemeinen, kleine Buchstaben, wie f, g, u , Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, während Funktionen mit großen Buchstaben, wie F, G, U , Laplace - transformierte bzw. Funktionen $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ bezeichnen.

Kapitel 1

Einleitung

Differential - algebraische Gleichungen, kurz DAEs (Differential - Algebraic Equations), ergeben sich in Natur - und Ingenieurwissenschaften regelmäßig, z.B. bei Problemen aus der Mechanik oder der Elektrotechnik. Es handelt sich dabei um gewöhnliche Differentialgleichungen, die mit algebraischen Gleichungen gekoppelt werden, um sie dann als eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem aufzufassen. Beispielsweise bei der Beschreibung der Bewegung eines Körpers unter Zwangsbedingungen ergibt sich oftmals

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(t, x(t), y(t)) \\ 0 &= g(t, x(t), y(t)) ,\end{aligned}$$

wobei es sich bereits um eine DAE handelt. Eine allgemeine Form Differential - algebraischer Gleichungen ist eine implizite Differentialgleichung der Gestalt

$$f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m, n \in \mathbb{N} ,$$

wobei $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$. Im Bereich der Elektrotechnik ergeben sich aufgrund der Kirchhoffschen Gleichungen häufig DAEs der Form

$$\begin{aligned}E\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) , \\ E, A &\in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad x \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) .\end{aligned}$$

Um diese Differentialgleichungen zu lösen wird oftmals so verfahren, dass eine Laplacetransformation durchgeführt wird. Dies hat den Nutzen, dass die Differentiation auf algebraische Operationen in einem anderen Funktionenraum zurückgeführt werden kann. Hieraus ergibt sich dann ein einfaches algebraisches Gleichungssystem, das es zu lösen gilt. Ein Ziel ist, dieses Gleichungssystem, in dem sich viele unbekannte Konstanten befinden, symbolisch zu lösen, um an der symbolischen Lösung das Systemverhalten in Abhängigkeit von bestimmten Konstanten ablesen zu können. An diesem Punkt muss allerdings festgestellt werden, dass eine symbolische Lösung dieser Gleichungssysteme, deren Dimension von 10 bis über 100 reicht, selbst für moderne Computer kaum oder nicht möglich ist. Und falls man eine solche Lösung erhält, so ist diese derart kompliziert, dass es nicht möglich ist an ihr das Systemverhalten abzuschätzen. Diesem Problem begegnet man zum Teil und insbesondere im Bereich des Analogschaltungsdesigns durch eine Approximation der beteiligten Matrizen. Hierbei wird ein Fehler in Kauf genommen, den man im "Frequenzbereich", also im Bereich der Laplace-Transformierten, gut abschätzen und kontrollieren kann. Allerdings ist bisher unklar, wie sich die gemachten Fehler im "Zeitbereich", also auf die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung vor der Transformation, auswirken. Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen ersten Einblick in diese Problematik zu gewinnen und mit Hilfe der zugrundeliegenden Theorie im Bereich der Laplace-Transformation, sowie der Lebesgue- und Hardy Räume erste Fehlerschranken zu gewinnen.

Hierzu wird im folgenden Kapitel auf grundlegende Teile der Lebesgue'schen Theorie eingegangen, die eine Grundlage darstellen, um die im darauffolgenden Kapitel 2.2 eingeführte Laplacetransformation hinreichend zu verstehen. Darüber hinaus werden bekannte Resultate der Laplacetheorie, sowie eine Ungleichung über Faltungen, die für die späteren Betrachtungen notwendig sind, zitiert und zum Teil bewiesen, um einen logischen Aufbau der Thematik sicherzustellen. Hiernach werden dann in Kapitel 2.3 die Hardy Räume eingeführt und ein überaus nützliches Ergebnis zitiert, das genutzt wird, um den Bildbereich gewisser Funktionenräume unter der Laplacetransformation zu charakterisieren und schließlich ein Maß für den Fehler zu erhalten. Abschließend wird in Kapitel 2.4 dargestellt, wie DAEs durch eine Laplacetransformation gelöst werden, um dann in Kapitel 3.1 hinreichend genau darzulegen, wie die DAEs approximiert wer-

den. Im dritten Kapitel wird also zunächst erläutert, wie die Approximation abläuft, woraufhin in 3.2 mit Hilfe der zugrundeliegenden Theorie erste Fehlerschranken ermittelt werden. Das Augenmerk liegt hierbei auf der Ermittlung eines Maximalfehlers ($\|\cdot\|_{L_\infty}$) und eines “energetischen” ($\|\cdot\|_{L_2}$) Fehlers, die dann praktisch das Verhalten des Fehlers bzgl. einer Lösungskomponente unter Änderungen an der Norm der Eingangsfunktion widerspiegeln. Außerdem wird eine, auf bereits bekannten Ergebnissen beruhende, Darstellung der Lösung im Frequenzbereich angegeben mit Hilfe derer es möglich ist die Fehlerschranken, für konkrete Probleme, mit geringerem Rechenaufwand zu erhalten. Abschließend werden die Fehlerschranken anhand zweier Beispiele getestet. Zuerst wird ein akademisches Beispiel in 3.3 betrachtet, an dem die Schranken ausführlich berechnet und mit dem tatsächlich auftretenden Fehler verglichen werden. Und schließlich wird ein reales Beispiel, in 3.4, betrachtet, dass für die Fehlerschranken eine ungünstige Eigenschaft besitzt, wodurch man lediglich eine der drei gefundenen Fehlerschranken anwenden kann.

Kapitel 2

Laplace-Transformation und Hardy-Räume

2.1 Lebesgue-Theorie

2.1.1 Definition

- i) Für $p \in \mathbb{N}$ sei die Norm $\|\cdot\|_p$ über \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n durch $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, und für $p = \infty$ durch $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ definiert.
- ii) Seien $(X_1, \Omega_1), (X_2, \Omega_2)$ zwei messbare Räume entsprechend [6, Kapitel 4]. Eine Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ wird messbar genannt, falls die Urbildmenge jeder im Bildbereich messbaren Menge wiederum eine messbare Menge ist, also

$$f^{-1}(\omega) \in \Omega_1 \quad \forall \omega \in \Omega_2.$$

Gegeben sei ein Maßraum (X, Ω, μ) , siehe z.B. [6, Kapitel 4].

- iii) Eine Menge $N \in \Omega$ wird Nullmenge genannt, falls das Maß dieser Menge Null ist, also $\mu(N) = 0$. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird ausschließlich das Lebesguemaß genutzt und ist auch immer gemeint, falls implizit ein Maß angesprochen wird.
-

- iv) Zwei messbare Funktionen $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind fast überall identisch, kurz $f_1 = f_2$ f.ü., falls die Menge $M = \{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$ eine Nullmenge ist.
- v) Gegeben sei eine Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist das essentielle Supremum von g definiert als:

$$\text{ess sup}(g) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \mid g(x) > a\}) = 0\}.$$

2.1.2 Bemerkung

- i) Der Unterschied zwischen dem essentiellen Supremum und dem Supremum besteht darin, dass bei dem essentiellen Supremum Änderungen von g auf Nullmengen im Definitionsbereich keine Rolle spielen. Entsprechende Nullmengen existieren bei stetigen Funktionen über metrischen Räumen beispielsweise nicht, was dazu führt, dass das essentielle Supremum stetiger Funktionen mit dem Supremum übereinstimmt.
- ii) Für zwei messbare, integrable Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gilt nach [6, Theorem 10.9 (i)]

$$\int |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0 \iff |f_1(t) - f_2(t)| = 0 \text{ f.ü.} \quad (2.1)$$

Dieses Ergebnis kann man allerdings auf messbare, integrable Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ verallgemeinern, indem man 2.1 komponentenweise anwendet. Man erhält also

$$\int \|f_1(t) - f_2(t)\| dt = 0 \iff \|f_1(t) - f_2(t)\| = 0 \text{ f.ü.},$$

woraus man weiter

$$\|f_1(t) - f_2(t)\| = 0 \in \mathbb{R} \text{ f.ü.} \iff f_1(t) - f_2(t) = 0 \in \mathbb{R}^n \text{ f.ü.} \iff f_1(t) = f_2(t) \text{ f.ü.} .$$

folgern kann. Insgesamt erhält man also

$$\int \|f_1(t) - f_2(t)\| dt = 0 \iff f_1(t) = f_2(t) \text{ f.ü.} .$$

2.1.3 Definition (Lebesgue-Räume)

Für $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, sei der Funktionenraum $\widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ Lebesgue-messbar, } \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_p^p dt < \infty \right\}.$$

Darauf erhält man durch

$$\|\cdot\|_{\widehat{L}_p(\mathbb{R})} : \widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto \|f\|_{\widehat{L}_p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

nach [6, 12.5(ii)] eine Seminorm.

Für $p = \infty$ sei

$$\widehat{L}_\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ Lebesgue-messbar, } \text{ess sup } \|f\|_\infty < \infty\}$$

mit der Seminorm

$$\|f\|_{\widehat{L}_\infty(\mathbb{R})} := \text{ess sup } \|f\|_\infty.$$

Um die Lebesgue-Räume L_p und - Normen $\|\cdot\|_{L_p}$ einzuführen ist es notwendig die betrachteten Funktionen f , aus den Funktionenräumen $\widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, in Äquivalenzklassen zusammenzufassen, da man ansonsten nur eine Seminorm erhält. Hierbei fasst man alle Funktionen die sich nur auf Nullmengen unterscheiden zu einer Äquivalenzklasse zusammen:

$$[f]_p := \left\{ g \in \widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \mid \|f - g\|_{\widehat{L}_p(\mathbb{R})} = 0 \right\}$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die Lebesgue-Räume durch

$$L_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) := \left\{ [f]_p \mid f \in \widehat{L}_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \right\}$$

definiert und die Lebesgue - Norm auf den Äquivalenzklassen stimmt mit der Seminorm eines Repräsentanten der Klasse überein:

$$\|[f]_p\|_{L_p(\mathbb{R})} := \|f\|_{\widehat{L}_p(\mathbb{R})}$$

Und schließlich bleibt noch zu sagen, dass man Lebesgue-Räume auch für Funktionen definieren kann, die nur von einem Teilbereich der reellen Zahlen abbilden, für $M \subset \mathbb{R}$:

$$L_p(M \rightarrow \mathbb{R}^n) := \{[f]_p \in L_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \mid \forall x \notin M : f(x) = 0\} \subset L_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

2.1.4 Definition (Nullfunktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird Nullfunktion genannt, falls $f \in [0]_p$.

Für eine Nullfunktion gilt also: $\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_p^p dt = 0$.

2.2 Laplace-Theorie**2.2.1 Definition** (Holomorphie)

Eine Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ heißt holomorph in $s_0 \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn F in s_0 komplex differenzierbar ist, d.h.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{F(s_0 + h) - F(s_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

2.2.2 Definition

Für $s \in \mathbb{C}$ und eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

das Laplace-Integral von f im Punkt s , sofern es existiert.

2.2.3 Bemerkung

Hier sei angemerkt, dass man das Laplace-Integral auch auf ganz \mathbb{R} , also als

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

betrachten kann. Für die später bearbeitete Problemstellung reicht es allerdings die sogenannte rechtsseitige Laplace-Transformation und damit das rechtsseitige Laplace-Integral zu nutzen. Aus diesem Grunde werden die Funktionen f im Folgenden auch nur auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachtet oder entsprechend mit Null fortgesetzt, also

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

2.2.4 Satz (Fundamentalsatz)

Wenn $\mathcal{L}\{f\}(s_0)$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ existiert, so existiert es auch in der offenen Halbebene $\mathbb{C}_{\Re > \Re(s_0)}$.

In allen folgenden Betrachtungen bezeichne $G(f) \subset \mathbb{C}$ die größte offene Halbebene, auf der die Laplace-Transformation von f existiert.

Beweis

[2, Satz 3.4] □

Mit diesem Wissen kann man das Laplace-Integral nun als einen Operator ($\mathcal{L}\{\cdot\}$) zwischen Funktionenräumen auffassen:

$$\mathcal{L} : D \rightarrow W, \quad f \mapsto (F : G(f) \rightarrow \mathbb{C}^n, s \mapsto \mathcal{L}\{f\}(s)).$$

Dabei bildet die Menge

$$D := \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \exists s_0 \in \mathbb{C} : |\mathcal{L}\{f\}(s_0)| < \infty\},$$

aller reellen Funktionen, für die in wenigstens einem Punkt das entsprechende Laplace-Integral existiert, den Definitionsbereich D und die Menge

$$W := \{F : \mathbb{C}_{\Re > a_0} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \exists f \in D \exists a_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{L}\{f\}(a_0) \text{ existiert, } F = \mathcal{L}\{f\}\}$$

den Wertebereich des Operators. Man bezeichnet nun die Anwendung des Operators \mathcal{L} auf eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Laplace-Transformation.

Betrachtet man die Laplace-Transformierten zweier Funktionen $f_1, f_2 \in D$ auf dem Schnitt ihrer Konvergenzhalbebenen $G(f_1) \cap G(f_2)$, so erhält man, dass aufgrund der Eigenschaften der Integration der Operator \mathcal{L} linear ist, demnach:

$$\mathcal{L}\{\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2\} = \alpha \cdot \mathcal{L}\{f_1\} + \beta \cdot \mathcal{L}\{f_2\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Da nun klar ist, was unter einer Laplace-Transformation verstanden werden soll, sind noch die Frage der Eindeutigkeit der Rücktransformation sowie die Rücktransformation selbst zu betrachten.

2.2.5 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Seien $f_1, f_2 \in D$, sei $s_0 \in G(f_1) \cap G(f_2)$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Stimmen die zu f_1, f_2 gehörigen Laplace-Transformierten, in einer rechten Halbebene auf der beide Laplaceintegrale existieren,

i) auf einer äquidistanten zur reellen Achse parallelen Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n = an + s_0$

ii) oder auf einer Folge z_n mit wenigstens einem Häufungspunkt in $G(f_1) \cap G(f_2)$

überein, also $F_1(z_n) = F_2(z_n)$, so unterscheiden sich die Originalfunktionen nur um eine Nullfunktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{L}\{f_1\}(z_n) - \mathcal{L}\{f_2\}(z_n) = 0 \implies f_1 = f_2 \quad \text{f.ü. .}$$

Fasst man Funktionen, wie in 2.1.3, die sich nur um eine Nullfunktion unterscheiden zu Äquivalenzklassen zusammen, so sind die Originalfunktionen zu einer Bildfunktion in diesem Sinne eindeutig.

Beweis

In [2, Satz 5.4] ist der erste Teil dieses Satzes bewiesen. Den zweiten Teil erhält man mit der Aussage, dass Laplace-Transformierte auf dem Inneren ihres Existenzgebietes holomorph sind [2, Satz 6.1] und dem Identitätssatz [4, Satz 9.15], der besagt, dass falls zwei in einem Gebiet G holomorphe Funktionen auf einer Folge mit Häufungspunkt in G übereinstimmen diese bereits auf ganz G , und damit in diesem Fall auf einer rechten komplexen Halbebene, übereinstimmen. Denn wenn zwei Laplace-Transformierte auf einer rechten Halbebene übereinstimmen, so liefert [2, Satz 5.1] wieder $f_1 = f_2$ f.ü. .

□

2.2.6 Bemerkung

Unterscheiden sich zwei Funktionen $f_1, f_2 \in D$ lediglich um eine Nullfunktion, so erhält man sofort, dass $G(f_1) = G(f_2)$, da für derartige Funktionen gilt:

$$0 = \int_0^\infty e^{-st}(f_1(t) - f_2(t)) dt = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt - \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt.$$

Daraus lässt sich folgern, dass falls die Laplace-Transformierten zweier Funktionen aus D auf einer entsprechenden Folge in einer rechten Halbebene übereinstimmen auch ihre Existenzhalbenen übereinstimmen.

2.2.7 Satz (Umkehrsatz)

Gegeben sei eine Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ und es existiere ein $s_0 \in \mathbb{C}$ derart, dass F in einer rechten Halbebene $H := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \Re(s_0)\}$ holomorph ist. Weiterhin sei

$$\sup_{\Re(s) > \Re(s_0)} \left\| \lim_{|\Im(s)| \rightarrow \infty} F(\Re(s) + i\Im(s)) \right\|_{\infty} = 0 ,$$

für $|\Im(s)| \rightarrow \infty$ soll also die Funktion über $\Re(s) > \Re(s_0)$ gleichmäßig gegen 0 gehen. Gilt darüber hinaus, dass

$$\forall s : \Re(s) > \Re(s_0) : \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\Re(s)-iA}^{\Re(s)+iA} \|F(z)\|_{\infty} dz < \infty ,$$

so ist $F(s)$ als Laplace-Transformierte der Funktion

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\Re(s)-iA}^{\Re(s)+iA} e^{tz} F(z) dz, \quad \Re(s) > \Re(s_0) \quad (2.2)$$

darstellbar, die von $\Re(s)$ unabhängig ist. Für $t < 0$ ist das Integral in (2.2) gleich Null und die so dargestellte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist auf ganz \mathbb{R} stetig.

Beweis

Für den Fall $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist der Satz in [2, Satz 28.2] bewiesen. Für den betrachteten mehrdimensionalen Fall $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ funktioniert der Beweis mit den hier verwendeten Normen allerdings analog, da es dann reicht das Problem komponentenweise zu betrachten und die hier gemachten Voraussetzungen dann komponentenweise mit denen in [2, Satz 28.2] übereinstimmen. \square

Jetzt wäre es interessant die Menge D der “Urbildfunktionen” des Operators \mathcal{L} genauer zu charakterisieren um sicherzustellen, dass die später betrachteten Funktionen überhaupt transformierbar sind. Da das allerdings relativ schwierig ist, werden nun Aussagen getroffen, die ausreichend sind, um die später betrachteten Funktionenklassen abzudecken.

2.2.8 Lemma

Folgende Funktionenklassen besitzen Laplace-Transformierte auf $\mathbb{C}_{\Re>0}$:

- i) Alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, für die Konstanten $M > 0, \alpha \leq 0$ derart existieren, dass

$$\|f(t)\|_2 \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt. Solche Funktionen werden im Folgenden als exponentiell beschränkt bezeichnet und insbesondere beschränkte Funktionen gehören zu dieser Klasse.

- ii) Alle $f \in L_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$.
 iii) Alle Polynome aus $\mathbb{R}^n[t]$.

Beweis

- i) Bei dieser Klasse von Funktionen stellt man fest, dass diese eine Teilmenge von D darstellen, und dass man diese nach der Transformation auch wieder rücktransformieren kann. Sie gehören zur Menge D , da es immer ein $s_0 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass das Laplace-Integral existiert:

Sei f exponentiell beschränkt mit (M, α) und es gelte $\forall t < 0 : f(t) = 0$, damit folgt, dass für alle $s_0 \in \mathbb{C}_{\Re>\alpha}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e^{-s_0 t} f(t)\|_2 dt &= \int_0^\infty |e^{-i\Im(s_0)t}| \|e^{-\Re(s_0)t} f(t)\|_2 dt \\ &\leq \int_0^\infty |e^{-\Re(s_0)t}| \|f(t)\|_2 dt \\ &\leq \int_0^\infty \|e^{-\Re(s_0)t} M e^{\alpha t}\|_2 dt \\ &= M \int_0^\infty e^{(-\Re(s_0)+\alpha)t} dt \\ &= \frac{M}{\Re(s_0) - \alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $t \mapsto e^{-s_0 t} f(t)$ absolut integrierbar ist und damit insbesondere $\mathcal{L}\{f\}(s_0)$ existiert. Darüber hinaus sieht man, dass für $\alpha \leq 0$ die Laplace-Transformierte für alle s_0 mit $\Re(s_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, womit man als Existenzhalbebene $\mathbb{C}_{\Re>0}$ für exponentiell beschränkte Funktionen erhält.

ii) Sei $f \in L_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Dann erhält man für alle s_0 mit $\Re(s_0) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e^{-s_0 t} f(t)\|_1 dt &= \int_0^\infty \|e^{-\Re(s_0)t} e^{-i\Im(s_0)t} f(t)\|_1 dt \\ &= \int_0^\infty |e^{-\Re(s_0)t}| |e^{-i\Im(s_0)t}| \|f(t)\|_1 dt \\ &\leq \int_0^\infty |e^{-\Re(s_0)t}| \|f(t)\|_1 dt \\ &\leq \int_0^\infty \|f(t)\|_1 dt < \infty, \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}_{\Re \geq 0}, \end{aligned}$$

womit man als Existenzhalbebene $\mathbb{C}_{\Re \geq 0}$ erhält.

iii) Für alle $f \in \mathbb{R}^n[t]$ erhält man $\mathbb{C}_{\Re > 0}$ als Existenzgebiet. Dies kann man zum Beispiel beweisen, indem man zeigt, dass für alle $a \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}$, die Funktion $f : t \mapsto a \cdot t^m$ die Halbebene $\mathbb{C}_{\Re > 0}$ als Existenzgebiet besitzt. Es genügt bereits dies zu zeigen, da die Laplace-Transformation auf dem Schnitt der Existenzgebiete der Laplace-Transformierten von Funktionen f_1, f_2 linear ist. Durch “Nachrechnen” erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a t^m e^{-s_0 t} dt &= a \int_0^\infty t^m e^{-s_0 t} dt, \quad \text{Substitution: } \tau = s_0 t, s_0 > 0 \\ &= a \int_0^\infty \frac{\tau^m}{s_0^m} e^{-\tau} \frac{d\tau}{s_0} \\ &= a \frac{1}{s_0^{m+1}} \Gamma(m+1) = a \frac{(m)!}{s_0^{m+1}}. \end{aligned}$$

Und hier sieht man sofort, dass das Integral für jedes $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert.

□

Schließlich noch einige nützliche Eigenschaften der Laplace-Transformation:

2.2.9 Satz (Differentiationssatz)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ und es existiere ein $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\mathcal{L}\{f'\}$ auf der Halbebene $\mathbb{C}_{\Re > s_0}$ existiert. Dann existiert auch $\mathcal{L}\{f\}$ auf $\mathbb{C}_{\Re > s_0}$ und es gilt:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+), \text{ für } s \in \mathbb{C}_{\Re > s_0}.$$

Beweis

[1, Corollary 1.6.6] □

Für den folgenden Satz muss klar sein, was unter einer Faltung verstanden werden soll, also:

2.2.10 Definition (Faltung)

Seien f_1, f_2 messbare Funktionen mit $f_1, f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, dann bezeichnet man

$$t \mapsto (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \, d\tau$$

als die Faltung von f_1 und f_2 .

Hierbei ist zu erwähnen, dass nach [6, 8.10 Corollary] aus f_1, f_2 messbar folgt, dass $f_1 \cdot f_2$ messbar ist, wodurch der Integrand der Faltung wiederum messbar ist.

2.2.11 Satz (Faltungssatz)

Genügen $F_1, F_2 : \mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}$ den Voraussetzungen des Umkehrsatzes und gilt $\mathcal{L}^{-1}(F_1) * \mathcal{L}^{-1}(F_2) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ exponentiell beschränkt, so gilt :

$$F_3(s) := F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(s),$$

womit folgt

$$f_3(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F_3\}(t) = (f_1 * f_2)(t).$$

Beweis

Dieser Beweis folgt der Beweisidee des Faltungssatzes in [2, Satz 10.1], und wurde hier nachvollzogen, da grundlegende Schritte dieses Beweises auch bei dem Beweis

der Ungleichung 2.2.12 genutzt werden. Außerdem ist festzustellen, dass dieser Beweis auch für Funktionen f_1, f_2 funktioniert, für die gilt:

$$\exists a, b > 0 \forall t \in \mathbb{R} : f_i(t) \leq a \cdot e^b, \quad i = 1, 2.$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Existenzbereiche der Laplace-Transformierten im allgemeinen nicht mehr $C_{\mathbb{R}>0}$ sind. Seien also $f_2 := \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$, $f_1 := \mathcal{L}^{-1}\{F_1\}$ zwei Funktionen über \mathbb{R} , die für $t < 0$ identisch Null gesetzt werden, also verschwinden sollen. Genügen F_1, F_2 den Voraussetzungen des Umkehrsatzes und sind f_1, f_2 exponentiell beschränkt bzw. gilt, dass die Faltung von f_1, f_2 bis auf Nullmengen beschränkt ist, also $\|f_1 * f_2\|_{L_\infty} \leq M$, $M \in \mathbb{R}$ oder sind $f_1, f_2 \in L_1$, existiert nach 2.2.8 ein $s_0 \in \mathbb{C}$ derart, dass die Integrale

$$\int_0^\infty |e^{-st} f_2(t)| dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty |e^{-st} f_1(t)| dt \quad \text{oder} \quad (2.3)$$

$$\int_0^\infty |e^{-st} (f_1 * f_2)(t)| dt \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}_{\Re > \Re(s_0)} \text{ existieren.} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1\}(s_0) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s_0) &= \int_0^\infty e^{-s_0\tau} f_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-s_0x} f_2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0\tau} f_1(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0x} f_2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0\tau} f_1(\tau) \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0x} f_2(x) dx d\tau \end{aligned}$$

Führt man nun die Substitution $x = t - \tau$ durch, so folgt:

$$\mathcal{L}\{f_1\}(s_0) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s_0) = \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0\tau} f_1(\tau) \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0(t-\tau)} f_2(t-\tau) dt d\tau.$$

Da die Integrale entsprechend (2.3), (2.4) existieren, kann nun die Reihenfolge der Integration vertauscht werden:

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0\tau} f_1(\tau) e^{-s_0(t-\tau)} f_2(t-\tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-s_0t} \int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt.$$

Stellt man nun noch fest, dass aufgrund der Voraussetzungen

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

gilt, so ergibt sich

$$\mathcal{L}\{f_1\}(s_0) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) \, d\tau \, dt = \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(s_0).$$

Da F_1, F_2 den Voraussetzungen des Umkehrsatzes genügen und $f_1 := \mathcal{L}^{-1}\{F_1\}, f_2 := \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$ exponentiell beschränkt sein sollen, kann man feststellen, dass

$$F_3(s) := F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s) = \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(s)$$

und damit erhält man

$$f_3(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F_3\}(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \, d\tau. \quad \square$$

Schließlich wird noch eine Ungleichung bezüglich der Faltung bewiesen, die für eine der späteren Fehlerschranken notwendig sein wird.

2.2.12 Lemma

Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ und es gelte für alle $t < 0 : f(t) = g(t) = 0$. Dann gilt

$$\|f * g\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}.$$

Beweis

Als erstes wird die Ungleichung von Young entsprechend [6, 12.1 Lemma] genutzt, um damit einer zum Beweis der Hölder- Ungleichung, entsprechend [3, Kapitel VI 1.5], analogen Betrachtung nachzugehen. Das Ergebnis dieser Vorgehensweise wird eine zur Hölder- Ungleichung analoge Abschätzung für das Supremum des Betrages einer Faltung von L_2 - Funktionen liefern.

(a) Youngs Ungleichung:

Für alle $A, B \geq 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(b) analog zur Hölder Ungleichung:

Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ mit $f(t) = 0, g(t) = 0 \, \forall t < 0$. Dann gilt $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{|f(\tau) \cdot g(t - \tau)|}{\left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{(a)}{\leq} \frac{|f(\tau)|^2}{2 \cdot \int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau} + \frac{|g(t - \tau)|^2}{2 \cdot \int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau}.$$

Integration von 0 bis ∞ liefert $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^\infty |f(\tau) \cdot g(t - \tau)| \, d\tau}{\left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ da } g(t - \tau) = 0 \forall \tau > t \text{ gilt} \\
&= \frac{\int_0^t |f(\tau) \cdot g(t - \tau)| \, d\tau}{\left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\stackrel{(b)}{\leq} \frac{\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau}{2 \cdot \int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau} + \frac{\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau}{2 \cdot \int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau} = 1 \\
&\Rightarrow \int_0^t |f(\tau) \cdot g(t - \tau)| \, d\tau \leq \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(c) Nun erhält man mit der Substitution $z = t - \tau$

$$\begin{aligned}
\int_0^t |f(\tau) \cdot g(t - \tau)| \, d\tau &\stackrel{(b)}{\leq} \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(t - \tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\int_t^0 |g(z)|^2 \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(z)|^2 \, dz\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(d) Und damit erhält man

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L_\infty} &= \text{ess sup } (|f * g|) = \text{ess sup } \left| \int_0^\bullet f(\tau) \cdot g(\bullet - \tau) \, d\tau \right| \\
&\leq \text{ess sup } \left(\int_0^\bullet |f(\tau) \cdot g(\bullet - \tau)| \, d\tau \right), \text{ in } t \text{ mon. wachsend} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t |f(\tau) \cdot g(t - \tau)| \, d\tau \right) \\
&\stackrel{(c)}{\leq} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\int_0^\infty |f(\tau)| \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(\tau)| \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \left(\int_0^\infty |f(\tau)| \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |g(\tau)| \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}
\end{aligned}$$

□

Um ein Maß für den durch die später erläuterte Approximation entstehenden Fehler im Zeit- und Frequenzbereich zu erhalten, werden jetzt Funktionenräume über $\mathbb{C}_{\mathbb{R}>0}$

betrachtet, die, wie sich zeigen wird, gut geeignet sind, um das Bild des L_2 unter der Laplace-Transformation zu charakterisieren.

2.3 Hardy-Räume

Im folgenden werden Normen im “Frequenzbereich” eingeführt.

Für das später betrachtete Approximationsproblem sind lediglich Hardy-Räume auf der rechten komplexen Halbebene $\mathbb{C}_{\Re>0}$ von Interesse, weshalb die Definition und die Betrachtung im folgenden auf diese beschränkt wird. Hier sei noch erwähnt, dass Hardy-Räume in der Literatur auch auf der linken komplexen Halbebene $\mathbb{C}_{\Re<0}$ und der Einheitskreisscheibe betrachtet werden.

2.3.1 Definition

Für $p \in [1, \infty)$ ist der Hardy-Raum auf der rechten komplexen Halbebene

$H_p(\mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n)$ definiert durch:

$$H_p(\mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n) := \left\{ F : \mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid F \text{ holomorph, } \sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_p^p d\omega < \infty \right\}.$$

Die Norm ist dann:

$$\|\cdot\|_{H_p} : H_p(\mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, F \mapsto \|F\|_{H_p} := \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_p^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p = \infty$ wird dann der Raum und die dazugehörige Norm folgendermaßen definiert:

$$H_{\infty}(\mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n) := \left\{ F : \mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid F \text{ holomorph, } \sup_{\Re(s)>0} \|F(s)\| < \infty \right\},$$

$$\|\cdot\|_{H_{\infty}(\mathbb{C}_{\Re>0})} : H_{\infty}(\mathbb{C}_{\Re>0} \rightarrow \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, F \mapsto \|F\|_{H_{\infty}(\mathbb{C}_{\Re>0})} := \sup_{\Re(s)>0} \|F(s)\|.$$

Nun folgt ein Satz, der zeigt wie eng die H_2 , L_2 Normen und die Laplace-Transformation zusammenhängen. Denn es wird festgestellt, dass für eine bestimmte Klasse von Funktionen die L_2 Norm im Zeitbereich und die H_2 Norm der Laplace-Transformierten im Frequenzbereich übereinstimmen.

2.3.2 Satz

Betrachtet man die Laplace-Transformation auf $L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}^n)$, so handelt es sich um einen linearen isometrischen Isomorphismus und damit gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} & : L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}^n) \rightarrow H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}^n), \\ \mathcal{L}^{-1} & : H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}^n)\end{aligned}$$

des weiteren gilt für die L_2 - und H_2 - Normen:

$$\forall f \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}^n) : \|\mathcal{L}\{f\}\|_{H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}^n)}.$$

Beweis

[7, Theorem 24]

□

2.3.3 Bemerkung

- i) Als erstes ist zu bemerken, dass entsprechend [7, Proposition 23] die Laplace-Transformation nur für $L_1 \cap L_2$ definiert ist. Dies lässt sich auf den L_2 verallgemeinern, wie in [7, Theorem 24] bewiesen wurde. Außerdem gilt, dass F nicht auf $i\mathbb{R}$ definiert ist, aber dass der Grenzwert $\lim_{\Re(s) \rightarrow 0} F(s)$ fast überall existiert.
- ii) Um die H_2 - Norm tatsächlich auszurechnen ergibt sich aus dem Beweis von [7, Theorem 24], sowie der Aussage in [7, Proposition 9] die nützliche Folgerung, dass für eine Funktion $F \in H_2$ die Norm durch

$$\|F\|_{H_2} := \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

berechnet werden kann. Es reicht also über die imaginäre Achse zu integrieren, da das Maximum des Integrals in genau diesem Fall angenommen wird.

Damit hat man eine Norm der Laplace-Transformierten einer Funktion f im Frequenzbereich, die mit einer Norm der Funktion f im Zeitbereich übereinstimmt. Hiermit ist es nun möglich für die Funktionenklasse H_2 einen durch die Approximation im Frequenzbereich entstandenen Fehler auf den Zeitbereich zu übertragen und Aussagen zu treffen, wie sich der Fehler im Zeitbereich verhält.

2.4 Differentialalgebraische Gleichungen

Im Folgenden soll klargemacht werden, wie eine DAE der Form

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (2.5)$$

im Frequenzbereich gelöst werden kann. Hierbei seien

$$E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad u : C^0(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad x \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

Bei der Lösung im Frequenzbereich geht man so vor, dass man das Problem (2.5) durch eine Laplace-Transformation in den "Frequenzbereich" transformiert. Hierbei muss man allerdings bedenken, dass somit die Laplace-Transformierbarkeit der Lösung x gefordert wird. Diese ist allerdings nicht allgemein gegeben, weshalb nicht-transformierbare Lösungen mit diesem Ansatz nicht betrachtet werden können, also verloren gehen. Durch die Transformation führt man die Differentiation auf algebraische Operationen zurück und insbesondere das Lösen von Differentialgleichungen gestaltet sich somit einfacher. Mithilfe der Laplace-Transformation lässt sich nun das Problem (2.5) lösen, indem man zuerst eine Laplace-Transformation durchführt und dann nach der Lösung X umstellt. Die "Eingangsfunktion" u muss stetig und Laplace-transformierbar sein. Darüber hinaus seien $E, A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, $u : C^0(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Im folgenden seien X, U die Laplace-Transformierten von x, u und es wird von verschwindenden Anfangswerten ausgegangen, also $x(0) = 0$. Damit erhält man

$$EsX(s) = AX(s) + bU(s) \implies X(s) = (Es - A)^{-1}bU(s). \quad (2.6)$$

Man sieht sofort, dass bei dieser Vorgehensweise $Es - A$ invertierbar sein muss. Bei $Es - A$ handelt es sich um eine Matrix, deren Einträge Polynome ersten Grades sind. Somit muss $Es - A$ über dem Ring der Matrizen, deren Elemente rationale Funktionen in s sind, invertierbar sein. Das heißt, die Determinante $\det(Es - A)$ darf nicht dem Nullpolynom entsprechen. Für die Problemstellungen, die in den Ingenieurwissenschaften auftauchen, ist oftmals nicht der gesamte Lösungsvektor von Interesse, sondern lediglich eine Komponente dieses Vektors. Aus diesem Grund werden alle weiteren Notationen, sowie die spätere Suche nach den Fehlerschranken, auf die Betrachtung einer einzigen Lösungskomponente abzielen.

2.4.1 Bemerkung

i) Im Folgenden sei

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad s \mapsto Es - A, \\ X_k : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad s \mapsto e_k^T X(s) \quad \text{für ein festes } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ii) Die komplexwertige Funktion

$$G_k : \mathbb{C}_{\Re \geq 0} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto e_k^T H^{-1}(s)b = \frac{X_k(s)}{U(s)}$$

ist dabei eine elegante Möglichkeit die Lösung einfach darzustellen. Wenn man sich vor Augen führt, dass die Lösung damit durch $X_k = G_k \cdot U$ gegeben ist, so “überträgt” die Funktion G_k das Eingangssignal zum Ausgangssignal. Deshalb wird sie auch Übertragungsfunktion genannt und gibt das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal an.

iii) Nach dem Faltungssatz 2.2.11 entspricht $G_k \cdot U$ der Originalfunktion $g_k * u$, falls G_k und U den Voraussetzungen des Umkehrsatzes entsprechen und die Rücktransformierten reell und exponentiell beschränkt sind. Man kann also feststellen, dass die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich einer “Übertragungsfunktion” im Zeitbereich entspricht, die die DAE für eine Komponente löst. Diese Funktion wird in der Mathematik als Greensche Funktion und im technischen Bereich auch als Gewichtsfunktion bezeichnet.

Kapitel 3

Approximation der Lösungen von DAEs

3.1 Methode der symbolischen Approximation

Die Aufgabenstellung, die sich nun entsprechend 2.4 ergibt, ist

$$(Es - A)X(s) = H(s)X(s) = bU(s)$$

symbolisch zu lösen, um das spätere Systemverhalten ablesen zu können. Das grundlegende Problem, das sich hierbei ergibt, ist, dass $H : s \mapsto H(s)$ symbolisch zu invertieren selbst für moderne Rechner zu aufwendig ist, da bei der Invertierung die Größe der symbolischen Ausdrücke zu stark anwächst.

Das Ziel ist H so zu verändern, dass die neue Matrix $\tilde{H} = H - \Delta H$ zwei Bedingungen erfüllt. Zum Einen soll die Inverse \tilde{H}^{-1} wesentlich einfacher zu berechnen sein und zum Anderen soll die durch \tilde{H} erhaltene Lösung $\tilde{X}_k = e_k \tilde{H}^{-1} bU$ nah an der ursprünglichen Lösung liegen, also $\tilde{X}_k \approx X_k$, wobei die "Nähe, \approx " in 3.2 mit Hilfe von Normen, näher betrachtet wird.

Diese Ziele werden erreicht, indem in den Elementen von H , die ja Polynome ersten Grades in s darstellen, Terme identifiziert werden, die man vernachlässigen kann. Entsprechende Terme werden dann einfach Null gesetzt. Hierdurch wird H offensichtlich einfacher, wodurch die Invertierung in den meisten Fällen leichter wird. Da nur Ter-

me “gestrichen” werden, die in angemessenen Grenzen zu vernachlässigen sind, wird darüber hinaus sichergestellt, dass der entstehende Fehler $X_k - \tilde{X}_k$ möglichst “gering” gehalten wird. Eine genaue Erklärung und Herleitung des Algorithmus ist in [5, Kapitel 2.4] zu finden. Eine grundlegende Frage, die in diesem Zusammenhang allerdings offen bleibt, ist, wie sich der Fehler im Frequenzbereich $\Delta X_k = X_k - \tilde{X}_k$ auf den Zeitbereich auswirkt. Wie sich also ΔX_k auf $\Delta x_k = x_k - \tilde{x}_k$ auswirkt.

Diese Problemstellung soll nun hier betrachtet werden.

3.2 Fehlerabschätzungen

Als erstes wäre es nützlich sich klar zu machen, welcher exakte Fehler im Zeitbereich bei einer Approximation der Matrizen im Frequenzbereich auftritt und wie man diesen berechnen könnte.

Mit den in Abschnitt 2.4 gemachten Betrachtungen und Begriffen ist nun klar, dass sich die Lösung einer Komponente des Lösungsvektors mit Hilfe der Übertragungsfunktion darstellen lässt als:

$$X_k(s) = G_k(s)U(s).$$

Außerdem sieht man sofort, dass eine Änderung in der (i,j)-ten Komponente der Matrix $H(s) = (Es - A)$ zu einer geänderten Matrix

$$\tilde{H}(s) = (Es - A - \Delta H(s))$$

und damit zu einer geänderten Übertragungsfunktion

$$\tilde{G}_k(s) = e_k \tilde{H}^{-1}(s) b$$

führt. Damit ergibt sich die Lösung des “approximierten” Problems zu

$$\tilde{X}_k(s) = \tilde{G}_k(s)U(s).$$

Im Frequenzbereich folgt damit, dass der durch die “Approximation” gemachte Fehler folgendermaßen aussieht:

$$\Delta X_k(s) = X_k(s) - \tilde{X}_k(s) = G_k(s)U(s) - \tilde{G}_k(s)U(s) = (G_k(s) - \tilde{G}_k(s))U(s) = \Delta G_k(s)U(s)$$

Um den Fehler zu bestimmen, reicht es also aus, die Differenz der Übertragungsfunktion zu kennen. Kennt man die Übertragungsfunktion, so erhält man folgende Abschätzungen:

3.2.1 Theorem

Seien $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und $H(s) := Es - A$ sowie $G_k(s) := e_k^T H^{-1}(s)b$, H sei also invertierbar. Weiter sei $\tilde{H}(s) := H(s) - e_i h e_j^T$, $h \in \mathbb{R}[s]$, wobei h ein Polynom ersten Grades in s sei. Damit erhält man $\tilde{G}_k(s) := e_k^T (H(s) - \tilde{H}^{-1}(s))b$. Und schließlich die für dieses Theorem wesentlichen Objekte:

$$\Delta G_k := G_k - \tilde{G}_k, \quad \Delta x_k := \mathcal{L}^{-1}\{\Delta G_k U\}.$$

Ist $\Delta g_k := \mathcal{L}^{-1}(G_k) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt:

i) Genügt ΔG_k den Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.7 und ist

$$u \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}), \quad \Delta G_k \in H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}), \quad \text{so gilt}$$

$$\|\Delta x_k\|_{L_\infty} \leq \|\Delta G_k\|_{H_2} \|u\|_{L_2}.$$

ii) Mit $u \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ und $\Delta G_k \in H_\infty(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C})$ erhält man

$$\|\Delta x_k\|_{L_2} \leq \|\Delta G_k\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2}.$$

iii) Mit $U \in H_\infty(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C})$ und $\Delta G_k \in H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C})$ gilt

$$\|\Delta x_k\|_{L_2} \leq \|\Delta G_k\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty}.$$

Beweis

Ersteinmal ist festzustellen, dass mit $\Delta G_k \in H_2(\mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C})$, aufgrund von Satz 2.3.2, $\Delta g_k \in L_2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ folgt.

Für die erste Aussage:

$$\|\Delta x_k\|_{L_\infty} \stackrel{2.2.11}{=} \|\Delta g_k * u\|_{L_\infty} \stackrel{2.2.12}{\leq} \|\Delta g_k\|_{L_2} \|u\|_{L_2} \stackrel{2.3.2}{=} \|\Delta G_k\|_{H_2} \|u\|_{L_2}.$$

Für die zweite Aussage:

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_k\|_{L_2} &\stackrel{2.3.2}{=} \|\Delta X_k\|_{H_2} \\
&= \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|\Delta G_k(x+i\omega)U(x+i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\Delta G_k(x+i\omega)U(x+i\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|\Delta G_k\|_{H_\infty}^2 |U(x+i\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\Delta G_k\|_{H_\infty} \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|U(x+i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\Delta G_k\|_{H_\infty} \|U\|_{H_2} \\
&\stackrel{2.3.2}{=} \|\Delta G_k\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2}.
\end{aligned}$$

Für die dritte Aussage (analog zur zweiten):

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_k\|_{L_2} &\stackrel{2.3.2}{=} \|\Delta X_k\|_{H_2} \\
&= \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|\Delta G_k(x+i\omega)U(x+i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\Delta G_k(x+i\omega)U(x+i\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|U\|_{H_\infty}^2 |\Delta G_k(x+i\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|U\|_{H_\infty} \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|\Delta G_k(x+i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\Delta G_k\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty}.
\end{aligned}$$

□

Da es, was den Aufwand betrifft, schwierig ist

$$\Delta G_k = (G_k - \tilde{G}_k) = e_k(H^{-1} - (H - \Delta H)^{-1})b$$

symbolisch durch die Invertierung von H und $H - \Delta H$ zu erhalten, wird nach einer günstigeren Darstellung von ΔG_k gesucht. Dazu der folgende Satz, mit dem dann $H^{-1} - (H - \Delta H)^{-1}$ umgeformt werden soll:

3.2.2 Satz (Sherman-Morrison-Woodbury Formel)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar und $U \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $V^T \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \leq n$, sowie I_m die Identitätsmatrix der Dimension m . Dann ist $A - UV^T$ genau dann invertierbar, wenn $I_m - V^T A^{-1} U$ invertierbar ist. Ist $A - UV^T$ invertierbar, so folgt

$$(A - UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}.$$

Beweis

Teil 1:

Betrachtet man $M = \begin{bmatrix} I & V^T \\ U & A \end{bmatrix}$ und stellt dies als Produkt von Block-Diagonalmatrizen dar:

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ U & A - UV^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & V^T \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - V^T A^{-1}U & 0 \\ A^{-1}U & I \end{pmatrix}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A - UV^T) = \det(A) \det(I - V^T A^{-1}U) \neq 0 \\ &\Rightarrow A - UV^T \text{ regulär} \Leftrightarrow I - V^T A^{-1}U \text{ regulär.} \end{aligned}$$

Teil 2:

Seien I_n, I_m Einheitsmatrizen der Dimension n und m

$$\begin{aligned} &(A - UV^T)(A^{-1} - A^{-1}U(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}) \\ &= I_n - UV^T A^{-1} - U(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1} \\ &\quad + UV^T A^{-1}U(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1} \\ &= I_n + U[-I_m - (I_m - V^T A^{-1}U)^{-1} + V^T A^{-1}U(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}]V^T A^{-1} \\ &= I_n + U[-I_m - (-I_m + V^T A^{-1}U)(I_m - V^T A^{-1}U)^{-1}]V^T A^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

□

Nun wird dieser Satz genutzt, um eine Darstellung für ΔG_k zu gewinnen.

3.2.3 Theorem

Gegeben seien $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, s \mapsto (Es - A)$, sowie $\Delta H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, s \mapsto \Delta H(s)$, wobei ΔH bis auf das (i, j) -te Element eine Nullmatrix sei. Im (i, j) -ten Element stehe ein komplexes Polynom maximal ersten Grades. Mit den Schreibweisen

$$h_{i\bullet}^{-1} = e_i^T H^{-1}, \quad h_{ij}^{-1} = e_i^T H^{-1} e_j$$

gilt:

$$\Delta G_k = \frac{h_{ki}^{-1} \Delta H_{ij} h_{j\bullet}^{-1}}{1 - \Delta H_{ij} h_{ji}^{-1}} b.$$

Beweis

Wählt man V und U entsprechend $\Delta H = V^T \cdot U$ folgt

$$\begin{aligned} \Delta G &= G - \tilde{G} = [(H)^{-1} - (H - \Delta H)^{-1}] b \\ &\stackrel{3.2.2}{=} [H^{-1} - H^{-1} + H^{-1} U (I_m - V^T H^{-1} U)^{-1} V^T H^{-1}] b \\ &= [H^{-1} U (I_m - V^T H^{-1} U)^{-1} V^T H^{-1}] b. \end{aligned}$$

Besitzt ΔH nur ein Element $\Delta H_{i,j}$ ungleich Null, so ist ΔH mit $U, V \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ darstellbar, wodurch sich ΔG weiter zu

$$\frac{H^{-1} \Delta H H^{-1}}{1 - V^T H^{-1} U} b$$

vereinfachen lässt. Betrachtet man nun ΔG_k , wählt $V_k = 0 \forall k \neq j, V_j = 1$, $U_k = 0 \forall k \neq i, U_i = \Delta H_{i,j}$, so erhält man

$$\Delta G_k = e_k^T \frac{H^{-1} \Delta H H^{-1}}{1 - V^T H^{-1} U} b = \frac{h_{k\bullet}^{-1} \Delta H H^{-1}}{1 - \Delta H_{ij} h_{ji}^{-1}} b = \frac{h_{ki}^{-1} \Delta H_{ij} h_{j\bullet}^{-1}}{1 - \Delta H_{ij} h_{ji}^{-1}} b.$$

Hier ist festzustellen, dass es sich um ein gebrochenrationales Polynom in s handelt:

$$\frac{h_{ki}^{-1}(s) \Delta H_{ij}(s) h_{j\bullet}^{-1}(s)}{1 - \Delta H_{ij}(s) h_{ji}^{-1}(s)} b.$$

□

Um nun einen Eindruck von der Art des Fehlers und den gezeigten Fehlerschranken zu gewinnen wird jetzt ein akademisches Beispiel mit überschaubaren Matrizen

$E, A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ betrachtet. Hierbei werden die Übertragungsfunktionen direkt und nicht mit Hilfe der Sherman-Morrison-Woodbury Formel berechnet, da die durch direkte Rechnung entstehenden Polynome wesentlich einfacher sind. Dafür wird ein größerer Rechenaufwand in Kauf genommen, der bei einem 3×3 Beispiel allerdings nicht problematisch ist. Danach werden die Fehlerschranken an einem realen Beispiel, einer gewöhnlichen Emitter-Verstärker-Schaltung, getestet, wobei festgestellt wird, in welchen Fällen die Schranken keinen Informationsgewinn liefern.

3.3 Akademisches Beispiel

3.3.1 Lösung des ungestörten Systems

Betrachtet wird nun die DAE, $E\dot{x} = Ax + bu$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10^{-4} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ -1 & 0 & 1 \\ -10^{-5} & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u, \quad (3.1)$$

wobei hier festzustellen ist, dass es sich um ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 3. Ordnung handelt, was genutzt wird, um den Fehler im Frequenzbereich zu berechnen und dann die Werte der Fehlerschranken direkt mit dem Fehler im Zeitbereich zu vergleichen. Im Frequenzbereich ergibt sich, entsprechend (2.6), das Gleichungssystem

$$X = H^{-1}bu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 & -s - 100 \\ 10^{-4}s + 1 & 0 & -s - 1 \\ 10^{-5} & -s - 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U(s).$$

Betrachtet man nun die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G_2(s) &= e_2 H^{-1}(s)b \\ &= \frac{s + 100}{100010s^3 + 301010s^2 + 10201001s + 10000001}, \end{aligned}$$

so ergibt sich die Lösung

$$X_2(s) = \frac{s+100}{100010s^3+301010s^2+10201001s+10000001} U(s).$$

Um die später berechneten Fehlerschranken einschätzen zu können, werden sie mit dem exakten Fehler im Zeitbereich verglichen. Dazu wird nun die Lösung im Zeitbereich ermittelt.

Betrachtet wird die DAE (3.1). Es ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = E^{-1}Ax + E^{-1}bu$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10000}{10001} & -\frac{10000}{10001} & -\frac{990000}{10001} \\ 10^{-5} & -1 & 0 \\ \frac{10000}{10001} & -\frac{1}{10001} & -\frac{10100}{10001} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10000}{10001} \\ 0 \\ -\frac{10000}{10001} \end{pmatrix} u(t).$$

Um dieses System zu lösen, ist es notwendig sich auf Eingangssignale, also Inhomogenitäten des Differentialgleichungssystems, festzulegen.

Betrachtet wird eine typische L_2 - Funktion.

$$u(t) = \begin{cases} te^{-1}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \implies \mathcal{L}\{u_1\}(s) = U_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Die Lösung für x_2, u ergibt sich zu

$$x_2(t) = \begin{cases} a \cdot e^{-t} + b \cdot te^{-1} + c \cdot t^2 e^{-t} \\ + d \cdot e^{-\frac{10050}{10001}t} \cos\left(\frac{1}{100010} \sqrt{989999850010}t\right) \\ + f \cdot e^{-\frac{10050}{10001}t} \sin\left(\frac{1}{100010} \sqrt{989999850010}t\right), & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei die Lösungen für $t < 0$ Null gesetzt werden, da nur positive Zeiten von Interesse sind. Die Konstanten $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$ sind zu lang, um sie hier explizit anzugeben.

Nun werden zwei Störungen der Matrix H und der daraus resultierende Fehler betrachtet.

3.3.2 Polynomiale Störung des Systems

Es wird ein polynomialer Teil in H_{23} Null gesetzt. Zum Beispiel sei entsprechend (3.1)

$$\begin{aligned}\tilde{H} = H - \Delta H &= \begin{pmatrix} s & -1 & -s - 100 \\ 10^{-4}s + 1 & 0 & -s - 1 \\ 10^{-5} & -s - 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10^{-4}s + 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & -1 & -s - 100 \\ 1 - 10^{-3} & 0 & -s - 1 \\ 10^{-5} & -s - 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion zu

$$\tilde{G}_2(s) = \frac{s + 100}{100000s^3 + 299900s^2 + 10189901s + 9990001},$$

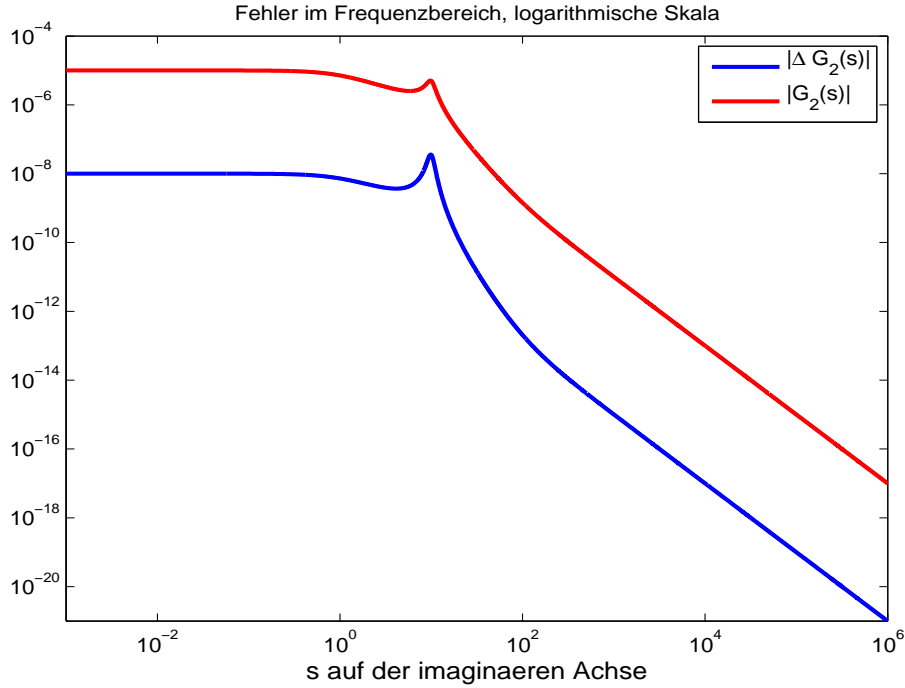
womit sich der folgende Fehler im Frequenzbereich ergibt:

$$\begin{aligned}\Delta X_2(s) = X_2(s) - \tilde{X}_2(s) &= (G_2 - \tilde{G}_2)U(s) \\ &= -\frac{10(s^2 + 110s + 1000)(s + 100)}{(100000s^3 + 299900s^2 + 10189901s + 9990001)(100010s^2 + 201000s + 10000001)}U(s).\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung dieses Fehlers ist der Graph von $|\Delta G_2(s)|$ auf $i\mathbb{R}$ in Abbildung 3.1 zu sehen.

Zur Berechnung der Fehlerschranken ist es notwendig festzustellen, welche Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 gelten. Da die Übertragungsfunktionen, die bei DAEs der Form (2.5) entstehen können, immer gebrochenrationale Polynome über \mathbb{C} sind, folgt, dass ΔG_k ebenfalls ein gebrochenrationales Polynom in s ist. Für solche Funktionen entspricht die Forderung $\Delta G_k \in H_2$ der Forderung, dass ΔG_k keine Polstellen in $\mathbb{C}_{\Re \geq 0}$ besitzt und der Nennergrad wenigstens um eins größer ist als der Zählergrad. Wie man leicht feststellt, ist dies bei ΔG_2 der Fall. Die Polstellen liegen in $\mathbb{C}_{\Re < 0}$. Außerdem ist interessant zu bemerken, dass $\mathcal{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$, sowie $\mathcal{L}\{\cos\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ Polstellen auf der imaginären Achse besitzen. Damit liegen diese nicht in H_2 . Da, um die H_2 - Norm zu erhalten, G_2 über eine Parallele zur imaginären Achse integriert werden muss, erhält man durch die analytische Landschaft eine Veranschaulichung des Problems: Zur Berechnung der H_2 - Norm muss man das Supremum des Integrals von $\|G_2\|_2^2$ über alle zur imaginären Achse parallelen Geraden in $\mathbb{C}_{\Re \geq 0}$ finden. Wie bereits in 2.3.3 erwähnt, liegt dieses Supremum für H_2 - Funktionen immer auf der imaginären

Abbildung 3.1:



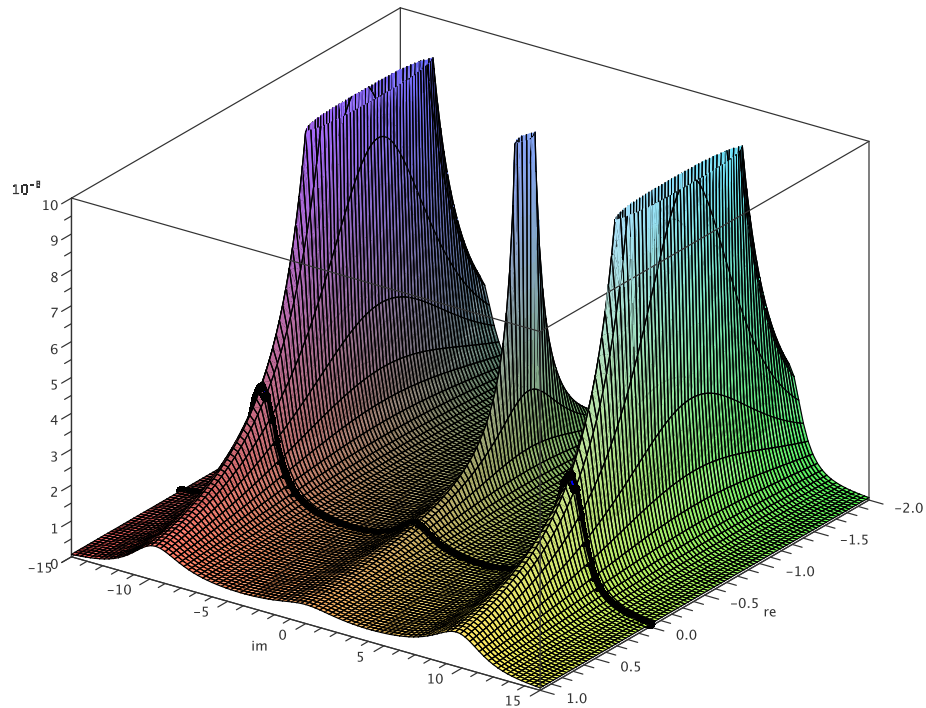
Achse. Das entsprechende Bild 3.2 veranschaulicht diese Feststellung. Als Normen der Übertragungsfunktion und des betrachteten Eingangssignals ergeben sich

$$\begin{aligned} \|\Delta G_2\|_{H_2} &= \left(\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|G_2(x + i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2.6893 \cdot 10^{-8} \\ \|\Delta G_2\|_{H_\infty} &= \sup_{\Re(s)>0} \|G_2(s)\|_2 \approx 3.5949 \cdot 10^{-8} \\ \|U\|_{H_2} &= \frac{1}{2} = \|u\|_{L_2}, \quad \|u\|_{L_\infty} = \frac{1}{e}, \quad \|U\|_\infty = 1, \end{aligned}$$

Womit sich nach 3.2.1 für $u(t) = te^{-t}$ die Fehlerschranken

$$\begin{aligned} \|\Delta x_2\|_{L_\infty} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|u\|_{L_2} \approx 2.6893 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \approx 1.3446 \cdot 10^{-8} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2} \approx 3.5949 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \approx 1.7975 \cdot 10^{-8} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty} \approx 2.6893 \cdot 10^{-8} \cdot 1 = 2.6893 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

ergeben. Um nun einen Maßstab für die ‘Güte’ des Fehlers zu erhalten wurde das

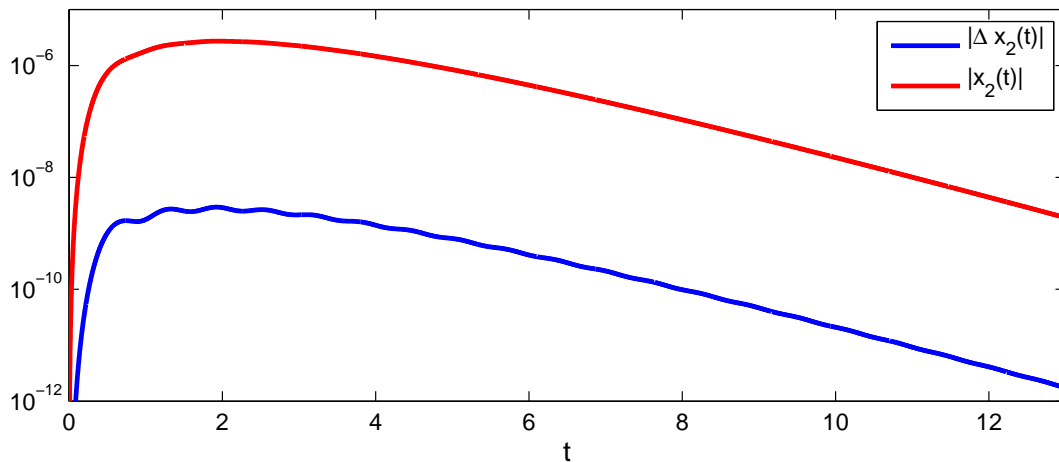
Abbildung 3.2: analytische Landschaft von ΔG_2 

gestörte System im Zeitbereich gelöst:

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} \tilde{a} \cdot e^{-t} + \tilde{b} \cdot t e^{-t} + \tilde{c} \cdot t^2 e^{-t} \\ + \tilde{d} \cdot e^{-\frac{1999}{2000}t} \cos\left(\frac{1}{2000} \sqrt{395604039}t\right) \\ + \tilde{f} \cdot e^{-\frac{1999}{2000}t} \sin\left(\frac{1}{2000} \sqrt{395604039}t\right), \text{ für } t \geq 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases},$$

wobei $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{f}$ reelle Konstanten sind. Aus dieser Lösung ergibt sich der analytische Fehler über $\|\Delta x_2(t)\|_2 = \|x_2(t) - \tilde{x}_2(t)\|_2$. Um diesen zu veranschaulichen, ist in Abbildung 3.3 der Graph von $\|\Delta x_2(t)\|_2$ und $\|x_2(t)\|_2$ dargestellt. Mit Hilfe der exakten

Abbildung 3.3: Fehler im Zeitbereich



Fehler im Zeitbereich ergeben sich die abgeschätzten Normen für u zu

$$\begin{aligned} \|\Delta x_2\|_{L_\infty} &\approx 2.9438 \cdot 10^{-9} \leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|u\|_{L_2} \approx 1.3446 \cdot 10^{-8} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} &\approx 4.3816 \cdot 10^{-9} \leq \|\Delta G_2\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2} \approx 1.7975 \cdot 10^{-8} \\ &\approx 4.3816 \cdot 10^{-9} \leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty} \approx 2.6893 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Man sieht an diesem Beispiel interessanterweise, dass durch die komplette Streichung eines polynomialen Teils mit kleinem Vorfaktor ($10^{-5} \cdot s$) tatsächlich auch ein sehr kleiner Fehler zustande kam. Bereits die Fehlerschranken prognostizierten, dass der Fehler im Vergleich zur Übertragungsfunktion gering ist. Interessant ist auch, dass die Schranke für den L_∞ in diesem Fall relativ genau ist. Das war eigentlich nicht zu erwarten, da man das Maximum von Δx_2 über die H_2 - Norm im Frequenzbereich und damit über ein Integral einer Transformierten Größe abschätzt.

3.3.3 Konstante Störung des Systems

Nun wird ein konstanter Teil in H_{31} mit $\Delta H_{31} = 10^{-5}$ Null gesetzt. Also ist entsprechend 3.1

$$\tilde{H} = H - \Delta H = \begin{pmatrix} -s & -1 & -s - 100 \\ 10^{-4}s + 1 & 0 & -s - 1 \\ 0 & -s - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich der Fehler im Frequenzbereich für x_2 zu

$$\Delta G_2(s) = \frac{s+100}{100010s^3+301010s^2+10201001s+10000001}$$

und man erhält für u die Fehlerschranken:

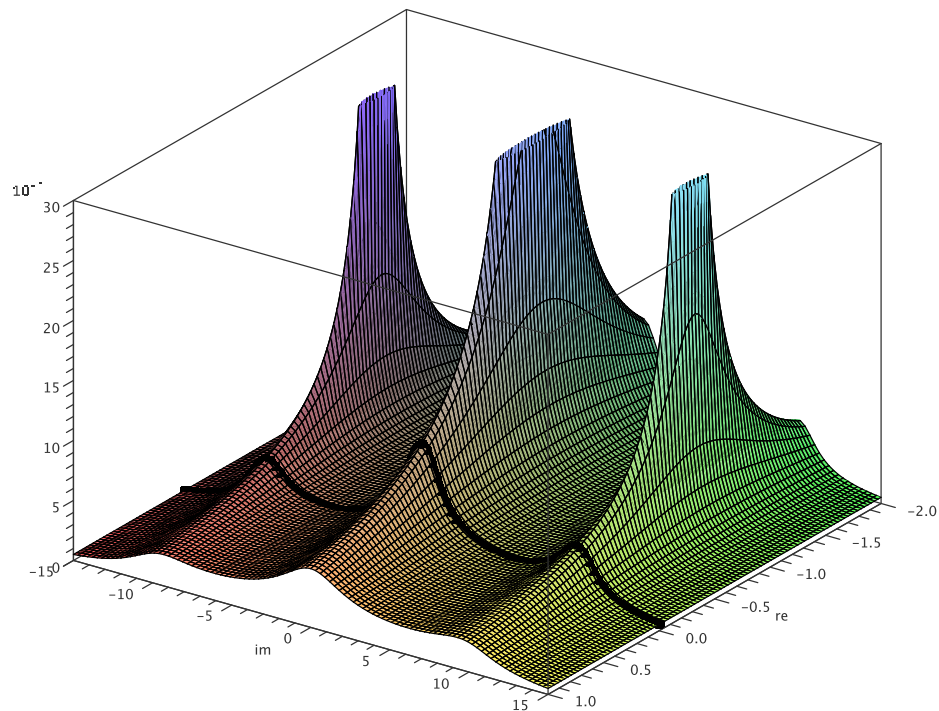
$$\begin{aligned} \|\Delta x_2\|_{L_\infty} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|u\|_{L_2} \approx 8.5400 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{2} \approx 4.2700 \cdot 10^{-6} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty} \approx 8.5400 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \approx 8.5400 \cdot 10^{-6} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2} \approx 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Um zu verdeutlichen, wie sich in diesem Fall die Normen ergaben, ist in Abbildung 3.4 die analytische Landschaft des Fehlers im Frequenzbereich zu sehen. Zum Vergleich wird nun wieder der exakte Fehler im Zeitbereich über die Lösung des Differentialgleichungssystems ermittelt.

Für den exakten Fehler im Zeitbereich $\Delta x_2 = x_2 - \tilde{x}_2$, ergeben sich die Fehler zu

$$\begin{aligned} \|\Delta x_2\|_{L_2} \approx 4.3451 \cdot 10^{-6} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_\infty} \|u\|_{L_2} \approx 5 \cdot 10^{-6} \\ \|\Delta x_2\|_{L_2} \approx 4.3451 \cdot 10^{-6} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|U\|_{H_\infty} \approx 8.5400 \cdot 10^{-6} \\ \|\Delta x_2\|_{L_\infty} \approx 2.7302 \cdot 10^{-6} &\leq \|\Delta G_2\|_{H_2} \|u\|_{L_2} \approx 4.2700 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

womit sich ein zur ersten Störung ähnliches Bild ergibt. Interessant hierbei ist, dass bei der ersten Störung ein polynomialer Teil gestrichen wurde, die Fehler allerdings um 2 Potenzen kleiner waren als beim Streichen einer kleinen Konstanten. Um genau zu sein, liegt der relative Fehler $\frac{\|\Delta x_2(t)\|_2}{\|x_2(t)\|_2}$ sogar bei 100%, während dieser bei der Streichung des Polynomialen Terms wesentlich geringer ist. Weiterhin ist festzustellen, dass die ermittelten Fehlerschranken beim ersten und zweiten Beispiel bei dem zwei bis sechsfachen des wirklichen Fehlers liegen.

Abbildung 3.4: analytische Landschaft von ΔG_2 

3.4 Reales Beispiel

Der Fehler wurde numerisch punktweise für

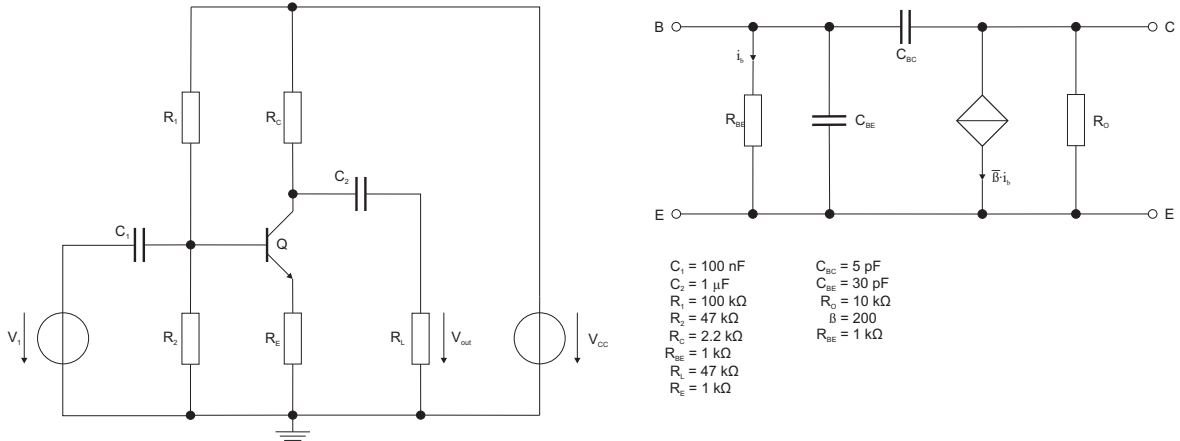
$$\Delta X_k(s) = \tilde{X}_k(s) - X_k(s) = e_k^T H^{-1}(s) b(s) - e_k^T \tilde{H}^{-1}(s) b(s)$$

gebildet.

Nun ein Beispiel anhand dessen man einen Eindruck für den Fehler in Abhängigkeit von der “Frequenz” $\Delta X_k(s)$ gewinnen kann. Es handelt sich um ein nicht akademisches Anwendungsbeispiel, um genau zu sein eine gewöhnliche Emitter-Verstärker-Schaltung “Common-emitter-amplifier”. Die entsprechende Schaltung ist in Abbildung 3.5 zu

sehen.

Abbildung 3.5: Verstärker-Schaltung, rechts Transistor Ersatzschaltbild



Das Beispiel, sowie die folgenden Matrizen stammen aus [5, 2.4.5]. Durch das Aufstellen und Vereinfachen der zum Schaltkreis gehörigen Gleichungen, also mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln und den Elementbeziehungen, ergibt sich eine Differentialgleichungssystem, die Laplace-transformiert die folgende Koeffizientenmatrix besitzt:

$$H(s) := \begin{pmatrix} c1 s & -c1 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c1 s \frac{1}{r1} + \frac{1}{r2} + c1 s + cbc s + cbe s & -cbc s & -cbc s & -cbe s & 0 & -\frac{1}{r1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -cbc s & \frac{1}{rc} + \frac{1}{r0} + c2 s + cbc s & -\frac{1}{r0} & -c2 s & -\frac{1}{rc} & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -cbe s & -\frac{1}{r0} & \frac{1}{rbe} + \frac{1}{re} + \frac{1}{r0} + cbe s & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -c2 s & 0 & \frac{1}{rl} + c2 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r1} & -\frac{1}{rc} & 0 & 0 & \frac{1}{r1} + \frac{1}{rc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entsprechend des in 3.1 angedeuteten Algorithmus, der in [5, Kapitel 2.4] zu finden ist, wählt man eine bestimmte "Frequenz", also eine rein imaginäre Zahl $\omega \in i\mathbb{R}$, aus. Es wird ermittelt, welche Terme in der Matrix gestrichen werden können, ohne dass der Fehler im Frequenzbereich am Punkt ω über eine vorgegebene Schranke δ wächst. Dieser Punkt wird auch "Design Point" bzw. "sampling Point" genannt. Es werden also alle Terme ermittelt, für die $\|\Delta X_k(\omega)\|_2 = \|X_k(\omega) - \tilde{X}_k(\omega)\| \leq \delta$ gilt, falls sie gelöscht werden. Dies wurde in [5, 2.4.5] für dieses Beispiel bei einem Design

Point von $\omega = 10000i$ durchgeführt. Hieraus ergaben sich 24 Terme, die man in der Matrix vernachlässigen kann. Im Folgenden wird der Fehler betrachtet, der nach dem Streichen eines Teils des Elements $h_{2,2}$ auftritt. Es wird $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + cbc s + cbe s$ gelöscht, womit sich

$$\tilde{H}(s) := \begin{pmatrix} c1 s & -c1 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c1 s & c1 s & -cbc s & -cbe s & 0 & -\frac{1}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -cbc s & \frac{1}{rc} + \frac{1}{r_0} + c2 s + cbc s & -\frac{1}{r_0} & -c2 s & -\frac{1}{rc} & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -cbe s & -\frac{1}{r_0} & \frac{1}{rbe} + \frac{1}{re} + \frac{1}{r_0} + cbe s & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -c2 s & 0 & \frac{1}{rl} + c2 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_1} & -\frac{1}{rc} & 0 & 0 & \frac{1}{r_1} + \frac{1}{rc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -\frac{1}{rbe} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Insgesamt erhält man eine algebraische Gleichung der Form

$$\begin{aligned} X(s) &= H^{-1}(s) \cdot bU(s), & \text{mit} \\ X &:= \left(V1 \ V2 \ V3 \ V4 \ V5 \ V6 \ Vx \ Iv1 \ Ivcc \ Ib \right)^T \\ b &:= \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right)^T \end{aligned}$$

erhalten. Betrachtet man nun den Fehler, der in $V5$ entsteht, so ergibt sich für die Differenz der Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} \Delta G_5(s) &= e_5 \cdot (H^{-1} - \tilde{H}^{-1})(s)b \\ &= \frac{24299(3 \cdot s^2 + 2027 \cdot 10^7 \cdot s - 3998 \cdot 10^{15}) \cdot s^2}{72897 \cdot s^4 + 499479030180700 \cdot s^3 + 468382809380060451 \cdot 10^5 \cdot s^2 + 18628794645159 \cdot 10^{12} \cdot s + 3597738 \cdot 10^{20}} \\ &\quad - \frac{1034 \cdot 10^4 (3 \cdot s^2 + 2027 \cdot 10^7 \cdot s - 3998 \cdot 10^{15}) \cdot s^2}{31009143 \cdot s^4 + 212469868129769000 \cdot s^3 + 1992414209982781 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 1694203466 \cdot 10^{18} \cdot s + 264 \cdot 10^{26}} \cdot \end{aligned}$$

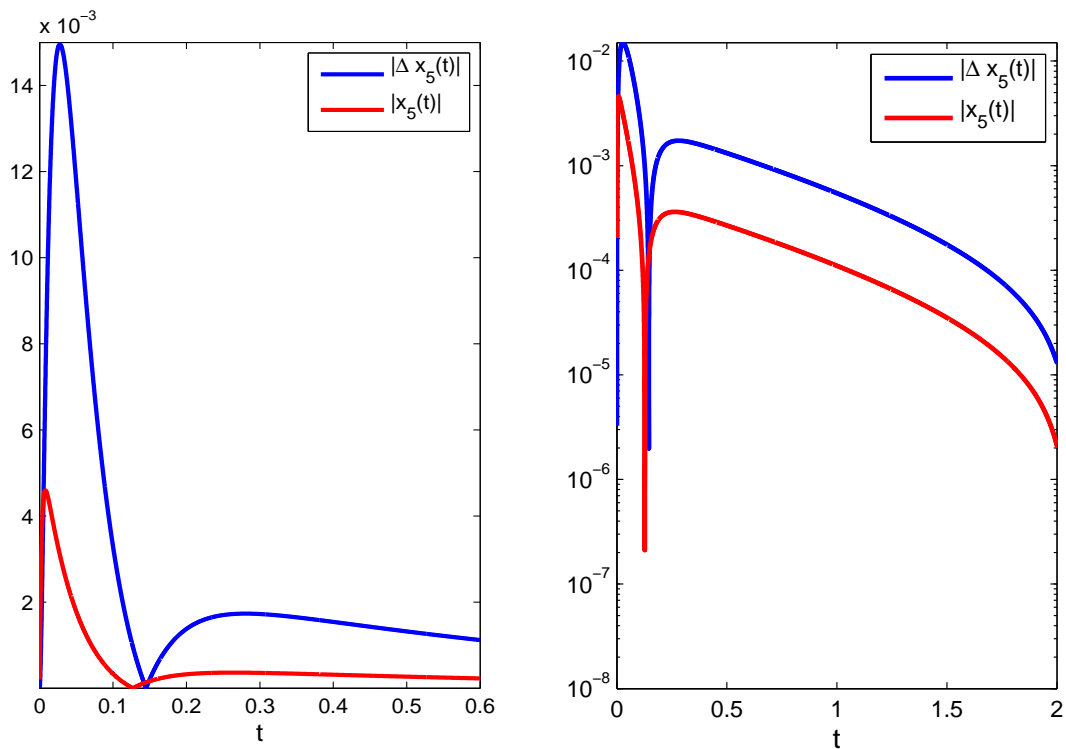
Anhand dieser Funktion sieht man, dass die Fehlerschranken 3.2.1 i) und iii) in diesem Beispiel nicht anwendbar sind, da die Grade der Zähler- und Nennerpolynome übereinstimmen. Das heißt, dass diese Funktion asymptotisch gegen eine Konstante strebt und somit nicht in H_2 liegen kann. Genau dieses Verhalten ist in Abbildung 3.7 und anhand der entsprechenden analytischen Landschaft in der Abbildung 3.8 zu sehen. Es lässt sich folglich nur die Fehlerschranke 3.2.1 ii) ermitteln. Vergleicht man diese mit dem wirklich auftretenden Fehler, so erhält man

$$\|\Delta x_5\|_{L_2} = 3.4383 \cdot 10^{-3} \leq \|\Delta G_5\|_{H_\infty} \cdot \|U\|_{H_2} = \frac{1}{2} 1.4562 = 0.7281.$$

An diesem Beispiel kann man interessanterweise feststellen, dass für die Streichung

jeweils eines Terms der 24 möglichen Terme bei 22 der 24 Terme ein ΔG_5 entsteht, bei dem die Nullstellen in $\mathbb{C}_{\Re < 0}$ liegen. Damit ist für diese 22 Terme die zweite Fehlerschranke in 3.2.1 anwendbar. Außerdem ist festzustellen, dass die beiden anderen Schranken, zumindest in diesem Beispiel, für keinen der möglichen 24 zu streichenden Terme anwendbar ist, da entweder gilt, dass der Fehler exakt Null beträgt, bei acht Termen, oder dass der Grad des Nenner- und des Zählerpolynoms übereinstimmen. Abschließend ist in Abbildung 3.6 zu sehen, dass eine Fehlerbetrachtung für den Zeitbereich tatsächlich notwendig sein könnte, da bei diesem Beispiel bereits ein relativer Fehler von durchschnittlich ca. 487% auftritt.

Abbildung 3.6: Fehler im Zeitbereich



(a) Fehler im Zeitbereich

(b) Fehler im Zeitbereich, logarithmisch skaliert

Abbildung 3.7: Fehler auf der imaginären Achse, logarithmische Skala

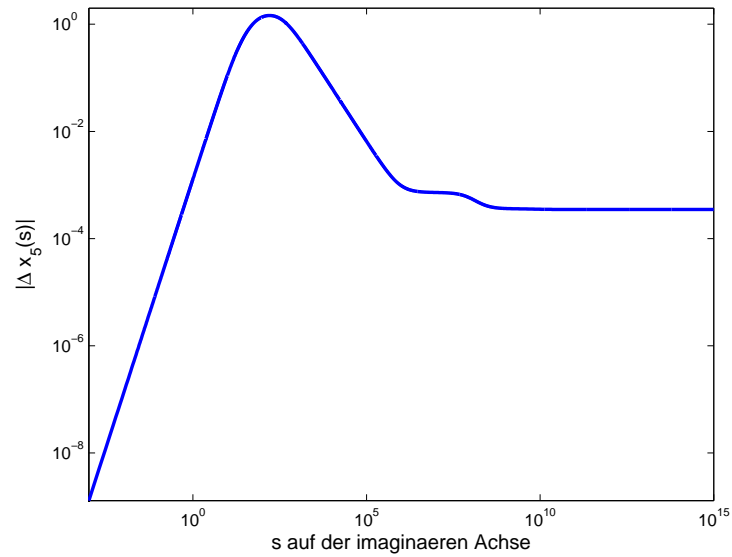
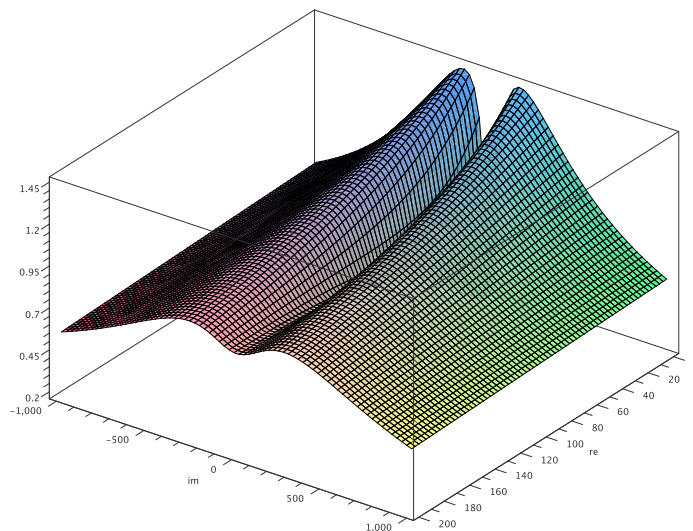


Abbildung 3.8: analytische Landschaft des Fehlers $\Delta V_5(s)$



3.5 Ausblick

Abschließend soll noch kurz erörtert werden, wozu man die hier gewonnenen Fehler-schranken nutzen könnte, und wie man an diesem Thema noch weiterarbeiten könnte. Betrachtet man ein beliebiges Problem das die Form (2.5) besitzt und in dem viele Parameter vorkommen, so kann man mit Hilfe des in 3.1 umrissenen Algorithmus eine Approximation der DAE im Frequenzbereich durchführen. Erfüllt die DAE im Frequenzbereich die Eigenschaft, dass die Übertragungsfunktion der betrachteten Lösungskomponente in H_2 oder H_∞ liegt, also der Nenner des komplexen Polynoms um wenigstens einen Grad höher oder gleich dem Zähler ist und das die Nullstellen des Nenners in der linken komplexen Ebene liegen (Element $\mathbb{C}_{\Re < 0}$) und ist man an einer Eingangsfunktion in L_2 , also einer absolut quadratisch integralen Eingangsfunktion interessiert, so kann man den Algorithmus leicht modifizieren, so dass der maximale im Zeitbereich gemachte Fehler oder die L_2 - Norm des Fehlers im Zeitbereich eine vorgegebene Schranke nicht übersteigen dürfen. Dies wäre in 3 einfachen Schritten zu realisieren.

- i) Ermittlung der Differenz der Übertragungsfunktionen von originalelem und gestörtem System mittels der Sherman-Morrison-Woodbury Formel entsprechend Theorem 3.2.3, die bereits im Algorithmus zur numerischen Fehlerbestimmung im Frequenzbereich angewandt wird.
- ii) Berechnung des gewünschten Fehlers mittels Theorem 3.2.1.
- iii) Vergleich des abgeschätzten Fehlers mit der vorgegebenen Fehlerschranke und Verwerfen oder Annahme des Approximationsschrittes.

Was die Weiterarbeit an diesem Thema betrifft, so würde es nützlich erscheinen eine Abschätzung der Form $\|\Delta x_k\|_{L_\infty} = \|\Delta G_k\|_{H_2} \|u\|_{L_\infty}$ zu erhalten, womit man den maximalen Fehler im Zeitbereich auch für lediglich beschränkte Eingangssignale wie Sinus oder Kosinus ermitteln könnte. Darüber hinaus wäre es wahrscheinlich lohnend die Laplace-Transformation unter der Einbeziehung von Distributionen zu betrachten, um dann mit Hilfe dieser die Menge der rücktransformierbaren Funktionen, durch eine

Abschwächung der Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.7, zu erweitern. Und man könnte untersuchen, ob ein Zusammenhang zwischen der $\|\cdot\|_{H_2}$ - Norm von ΔG_k und dem tatsächlichen Fehler im Zeitbereich existiert, sofern die Eingangsfunktion nicht in L_2 liegt.

Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Arendt, Charles J.K. Batty, Matthias Hieber, and Frank Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser Verlag, 2001.
 - [2] Gustav Doetsch. *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag, 1970.
 - [3] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Verlag, 2005.
 - [4] Klaus Gürlebeck, Klaus Habetha, and Wolfgang Sprößig. *Funktionentheorie in der Ebene und im Raum*. Birkhäuser Verlag, 2006.
 - [5] Eckhard Hennig. *Symbolic Approximation and Modeling Techniques for Analysis and Design of Analog Circuits*. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000.
 - [6] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, 2005.
 - [7] Stephan Trenn. *Hardy spaces and robustness of linear systems*. Diplomarbeit, TU-Ilmenau, September 2004.
-