Am Anfang waren Blitze

Beim Ein- und Ausschalten elektrischer Geräte funkt es manchmal, im schlimmsten Fall zerstören diese kleinen Blitze die empfindlichen Geräte. Mit einer neuen mathematischen Theorie lassen sich solche Blitze besser untersuchen und in manchen Fällen auch verhindern.

Blitze sind ein faszinierendes Naturschauspiel. Sie haben möglicherweise vor vier Milliarden Jahren das Leben entzündet, heute sind sie vor allem eine Gefahr für Menschen und elektrische Geräte. Selbst kleine Blitze, also Funken, können in empfindlichen elektronischen Bauteilen großen Schaden anrichten. Eine mögliche Ursache für solche zerstörerischen Funken ist die Selbstinduktion von Spulen. Dieser Effekt wird bereits in der Schulphysik mit Hilfe des Funkeninduktors demonstriert. Hierbei wird durch Öffnen eines Schalters der Stromfluss durch eine Spule unterbrochen. Nach dem Induktionsgesetz ist die Spannung einer Spule proportional zur Änderung des Stroms durch die Spule. Im Moment des Öffnens des Schalters springt der Wert des Stroms auf Null, die Änderung ist unendlich schnell. Die resultierende unendliche Spannung über der Spule realisiert sich durch einen Spannungsblitz, der jeden Isolator durchschlagen kann.

In der Mathematik werden physikalischen Größen wie Strom und Spannung üblicherweise als Funktionen der Zeit dargestellt und die Änderungsrate dieser Größe wird als Ableitung der entsprechenden Funktion bezeichnet. Das Induktionsgesetz besagt also, dass die Spannung über einer Spule die Ableitung des Stroms durch die Spule ist (multipliziert mit einer physikalischen Konstante - der Induktivität der Spule). Damit eine Funktion eine Ableitung besitzt, muss sie differenzierbar und insbesondere stetig sein. Eine Funktion mit Sprüngen ist nicht stetig und besitzt demnach keine Ableitung. Da das Öffnen eines Schalters einen Sprung in der Stromfunktion erzeugt, besitzt die Stromfunktion keine Ableitung und man kann den physikalisch beobachtbaren Effekt des Spannungsblitzes nicht mathematisch beschreiben.

Diese Diskrepanz zwischen der physikalischen Beobachtung und der mathematischen Modellierung war der Ausgangspunkt meiner Dissertation. Das Ziel war, eine mathematische Beschreibung des oben beschriebenen Phänomens zu finden. Wichtig hierbei war mir die Beschreibung des *ideellen* physikalischen Systems, z. B. sollen die Schalter sofort den Strom unterbrechen und die Spulen sollen exakt das Induktionsgesetz erfüllen. Diese Abstraktion ist ein übliches und notwendiges Vorgehen in den Naturwissenschaften. Im konkreten Fall der Modellierung von elektrischen Schaltkreisen ist die Betrachtung von ideellen Bauelementen etabliert und in den meisten Fällen hinreichend aussagekräftig.

Wie kann man nun eine Funktion mit einem Sprung ableiten? Dieses Problem wurde von Laurent Schwartz (1915-2002) erfolgreich durch die Theorie der *Distributionen* gelöst, für die er 1950 mit der Fields-Medaille (dem „Nobel-Preis“ der Mathematik) ausgezeichnet wurde. Funktionen sind spezielle Distributionen, weshalb letztere auch verallgemeinerte Funktionen genannt werden. Distributionen haben die Eigenschaft, dass sich immer eine Ableitung bilden lässt. Insbesondere haben Funktionen mit Sprüngen eine Ableitung im distributionellen Sinne. Eine der bekanntesten Distributionen ist der Dirac-Impuls (nach dem britischen theoretischen Physiker Paul Dirac, 1902-1984), welcher die Ableitung der Sprungfunktion, die von Null auf Eins springt, ist. Damit scheint das Problem von oben gelöst zu sein: Anstelle der Modellierung physikalischer Größen durch Funktionen stellt man physikalische Größen als Distributionen dar, insbesondere modelliert der Dirac-Impuls den in der Realität beobachtbaren Spannungsblitz.

Leider ist es nicht ganz so einfach. Distributionen sind keine Funktionen, deshalb kann man z. B. nicht mehr von einem Wert zu einer bestimmten Zeit sprechen. Dies widerspricht dem Ziel der Modellierung, denn Größen wie Spannung und Strom sollen bestimmte Werte zu bestimmten Zeiten haben. Hinzu kommt das Problem, dass die Anwesenheit von Schaltern in elektrischen Schaltkreisen zu verschiedenen Schaltungsbeschreibungen zu verschiedenen Zeiten führt. Man erhält also verschiedene mathematische Modelle zu unterschiedlichen Zeiten. Die resultierenden Gleichungen müssen deshalb für bestimmte Zeitintervalle formuliert werden. Ich konnte in meiner Dissertation zeigen, dass die notwendig resultierende Einschränkung von Distributionen auf Zeitintervalle im Allgemeinen *unmöglich* ist.

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Dilemma: Aus mathematischer Sicht werden Distributionen benötigen, um Ableitungen von Funktionen mit Sprüngen behandeln zu können, gleichzeitig sind Distributionen aber nicht für die Modellierung physikalischer Größen geeignet. Die Ursache dieses Dilemma ist, kurz gesagt, dass der Raum der Distributionen zu groß für die beabsichtigten Zwecke ist, d.h. es gibt Distributionen, die einerseits nicht für die Modellierung physikalischer Größen benötigt werden und andererseits zu mathematischen Schwierigkeiten führen.

Um dieses Dilemma zu lösen, habe ich zwei physikalisch plausible Annahmen gemacht. Die erste Annahme ist, dass in jedem endlichen Zeitintervall nur endlich viele Schaltvorgänge stattfinden. Die zweite Annahme betrifft das Verhalten zwischen den Schaltvorgängen. Hier sollen sich die physikalischen Größen „gutartig“ verhalten, d.h. sie sollen als mathematische Funktionen beschrieben werden können, die unendlich oft differenzierbar (oder kurz: glatt) sind.

Mit diesen zwei Annahmen ergibt sich als Ableitung einer Funktion mit einem Sprung nicht eine beliebige Distribution, sondern eine *stückweise glatte Distribution*. Vereinfacht gesagt, lässt sich eine stückweise glatte Distribution immer als Summe einer stückweise glatten Funktion und von Dirac-Impulsen (sowie deren Ableitungen) darstellen. Die physikalische Interpretation ist nun sehr einfach, z. B. lässt sich wie gewünscht zu jedem Zeitpunkt ein Wert zuordnen, hinzu kommt, dass zu bestimmten Zeiten auch Dirac-Impulse auftreten können, die dann als Spannungsblitze interpretiert werden können.

Die mathematische Untersuchung der stückweise glatten Distributionen ist ein wesentlicher Teil meiner Dissertation. Ich konnte z. B. zeigen, dass sich für stückweise glatte Distributionen genau eine Multiplikation definieren lässt, die kompatibel mit der Modellierung elektrischer Schaltkreise ist. Dies ist interessant, da es für allgemeine Distributionen nicht möglich ist, eine Multiplikation zu definieren. Ein zweiter Schwerpunkt meiner Arbeit war die Anwendung der Theorie auf praktisch relevante Fragestellung. Besonders spannend finde ich das folgende Szenario. In einem komplexen elektrischen Schaltkreis können Ausfälle von einzelnen Komponenten durch einen Schaltvorgang modelliert werden. Wie oben dargestellt, können Schaltvorgänge unter bestimmten Voraussetzungen zu Spannungsblitzen führen. Dies wiederum kann zu einer Zerstörung eines weiteren Bauteils führen usw., d.h. ein einziger Defekt kann unter Umständen durch eine Kettenreaktion den gesamten Schaltkreis zerstören. Es ist deshalb wichtig zu wissen, welche Komponentenausfälle Spannungsblitze im Schaltkreis erzeugen können. In meiner Dissertation habe ich einen einfach zu implementierenden Algorithmus entwickelt, der genau solche kritischen Komponentenausfälle findet.

Die Theorie der stückweise glatten Distributionen lässt sich aber nicht nur auf elektrische Schaltungen anwenden. Alle physikalischen oder chemischen Vorgänge, die sich durch sogenannte *differential-algebraische Gleichungen* beschreiben lassen, können mit der von mir entwickelten Theorie behandelt werden. Letztere sind Gleichungen, in denen dynamische (differential-) und statische (algebraische) Gleichungen gemeinsam zur Beschreibung des Systemverhalten genutzt werden. Bei elektrischen Schaltkreisen ist das Induktionsgesetz eine solche Differentialgleichung und eine algebraische Gleichung ist z.B. der Kirchhoffsche Knotensatz, der besagt dass die Summe aller in einen Knoten hineinfließenden Ströme gleich der Summe aller herausfließenden Ströme ist. Ein anderes Beispiel für differential-algebraische Gleichungen sind gekoppelte mechanische Systemen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind in diesem Fall die Differentialgleichungen und die mechanischen Kopplungen sind durch algebraische Gleichungen beschrieben. Bei mechanischen Systemen gibt es üblicherweise keine Blitze, aber impulsives Verhalten ist auch dort ein wohlbekanntes Phänomen und kann mathematisch auf die gleiche Weise wie Blitze bei elektrischen Schaltkreisen behandelt werden.

Konkrete Anwendungen der mathematischen Theorie spielen üblicherweise in mathematischen Arbeiten eine untergeordnete Rolle. Meine Dissertation ist da keine Ausnahme, der Schwerpunkt liegt klar auf mathematischen Definitionen, Theoremen und Beweisen. Logisch stehen diese am Anfang und bilden die notwendige Grundlage, um anwendungsbezogene Fragen präzise zu formulieren und manchmal auch beantworten zu können. Das Finden dieser logischer Grundlagen ist das eigentliche Ziel meiner Forschungsarbeit gewesen. Erkenntnistheoretisch stehen die mathematischen Grundlagen also am Ende und am Anfang waren Blitze.