Kürschaksche $2n$-Ecke (I)

1 Einleitung

Betrachtungen zu allgemeineren Polygonen als reguläre n-Ecke sind zeitgemäß. So stellte G. C. Shephard 1998 in „pratt sequences and n-gons“ einige ausgewählte Eigenschaften von beliebigen n-Ecken vor. Wir untersuchten in unserem Projekt, welches wir 1999 beim Landeswettbewerb „Jugend forscht“ verteidigten, ebenfalls Vielecke, die jedoch Verallgemeinerungen von regulären n-Ecken darstellen.

Die Idee zu diesem Projekt lieferte uns die Arbeit [1] von W. Mögling aus dem Jahr 1985, in der er eine von dem ungarischen Mathematiker Kürschak gefundene Eigenschaft am regulären Zwölfeck auf spezielle $2n$-Ecke verallgemeinerte. Er nannte diese besonderen Zwölfecke *Kürschaksche Zwölfecke*. Wir übertrugen diese Definition auf $2n$-Ecke, die wir entsprechend [1] *Kürschaksche $2n$-Ecke* nannten und auf verschiedene Eigenschaften hin untersuchten.

Kürschaksche $2n$-Ecke sind Verallgemeinerungen von regulären Vielecken, die nach unserer Definition im allgemeinen zwei verschiedene Seiten und zwei verschiedene Winkel besitzen, welche sich stets entsprechend abwechseln. Ein bekannter Spezialfall ist das Kürschaksche Viereck, das Parallelogramm.

Wir untersuchten Kürschaksche $2n$-Ecke auch in Hinsicht auf die 1995 erschienene Arbeit von A. Florian [2], in der er eine Abschätzung über die Summe zweier bestimmter Polygone angab. Diese Untersuchung ist aber aus Platzgründen nicht in diesem Artikel enthalten.

Ein zur Zeit noch offenes Problem in der kombinatorischen Geometrie ist die von Linderholm 1986 ausgesprochene Vermutung (s. [3]). Sie betrifft eine Hypothese über das Flächenverhältnis eines beliebigen konvexen Bereiches und eines umbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks. In unserer Arbeit haben wir diese Problematik für Kürschaksche $2n$-Ecke untersucht.

2 Definition

Ein $2n$-Eck $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nennen wir dann ein *Kürschaksches $2n$-Eck*, wenn es folgende zwei Eigenschaften besitzt:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_5A_6} = \cdots = \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = a,$$
$$\overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5} = \overline{A_6A_7} = \cdots = \overline{A_{2n}A_1} = b, \qquad (1)$$
$$\sphericalangle A_{2n}A_1A_2 = \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle A_4A_5A_6 = ... = \sphericalangle A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n} = \alpha,$$

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_3A_4A_5 = \sphericalangle A_5A_6A_7 = ... = \sphericalangle A_{2n-1}A_{2n}A_1 = \beta. \quad (2)$$

Vereinfacht kann man sagen, daß ein $2n$-Eck, bei dem abwechselnd kongruente Seiten und Innenwinkel vorliegen, ein Kürschaksches ist.

Für $a = b$ heißt das Kürschaksche $2n$-Eck *gleichseitig.*

Für $\alpha = \beta$ heißt das Kürschaksche $2n$-Eck *gleichwinklig.*

Gilt gleichzeitig $a = b$ und $\alpha = \beta$, so liegt ein *reguläres* $2n$-Eck vor.

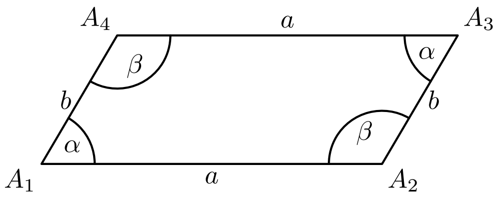


Bild 1: Parallelogramm als Kürschaksches Viereck

Für $n = 2$ erhält man ein Parallelogramm als bekannten Spezialfall eines Kürschakschen $2n$-Ecks (siehe Bild 1). Schon aus dem Schulunterricht der Klasse 7 ist die Gültigkeit der Eigenschaften (1) und (2) bekannt.

Es sollen durchgängig folgende Bezeichnungen gelten:

Das Kürschaksche $2n$-Eck A mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ hat die Seitenlängen a und b sowie die Innenwinkelgrößen α und β, das Kürschaksche $2n$-Eck B mit den Eckpunkten $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$ hat die Seitenlängen c und d sowie die Innenwinkelgrößen γ und δ.

Das reguläre n-Eck P mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \dots, P_n$ hat die Seitenlänge p und die Innenwinkelgröße ϑ, das reguläre n-Eck Q mit den Eckpunkten $Q_1, Q_2, ..., Q_{2n}$ hat die Seitenlänge q und die Innenwinkelgröße ϑ'.

Die Winkelbezeichnungen ϕ und ψ werden für solche Winkel benutzt, die als entscheidende Innenwinkel in „angesetzten“ oder „abgeschnittenen“ Dreiecken enthalten sind.

3 Konstruktion

Die Existenz Kürschakscher $2n$-Ecke läßt sich mit Hilfe einer Konstruktion beweisen. Wir fanden bisher drei Arten von Konstruktionen, von denen hier nur zwei vorgestellt werden sollen.

3.1 „Ansetzen“ von kongruenten Dreiecken an reguläre n-Ecke

Es sei ein reguläres n-Eck $P_1P_2 \dots P_n$ $(n > 2)$ bzw. eine Strecke $(n = 2)$ gegeben.

Über die Seiten des regulären n-Ecks bzw. der Strecke werden gleichsinnig kongruente Dreiecke mit den anliegenden Winkeln ϕ und ψ konstruiert (siehe Bild 2 für $n = 4$).

Es läßt sich leicht zeigen, daß das so entstandene $2n$-Eck $A_1A_2...A_{2n}$ ein Kürschaksches ist.
Dabei erhält man:
für $\phi + \psi < 180° - \vartheta$ ein konvexes, für $\phi + \psi > 180° - \vartheta$ ein konkaves (sternförmiges) Kürschaksches $2n$-Eck sowie für $\phi + \psi < 180° - \vartheta$ wieder ein reguläres n-Eck.

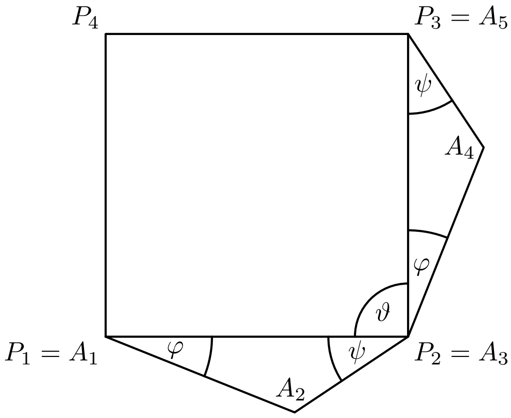


Bild 2: 1. Konstruktion: Kongruente Dreiecke an reguläres n-Eck ansetzen

3.2 „Abschneiden" kongruenter Dreiecke von regulären n-Ecken

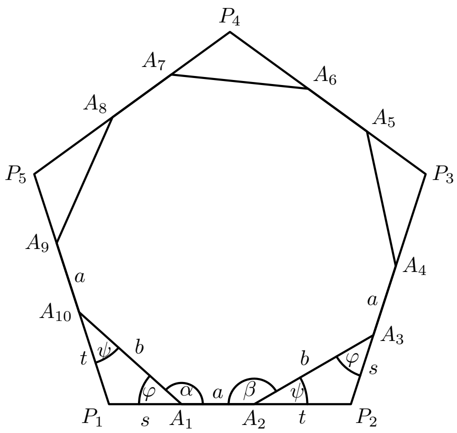


Bild 3: 2. Konstruktion: Kongruente Dreiecke vom regulären n-Eck abschneiden

Bei dieser Konstruktionsart muß wie bei der vorherigen Konstruktion zunächst ein reguläres n-Eck $P_1P_2...P_n$ gegeben sein, wobei jedoch $n \geq 3$ gelten muß.

Von diesem n-Eck „schneidet" man an den Ecken gleichsinnig kongruente Dreiecke ab (siehe Bild 3 für $n = 5$), dabei muß aber beachtet werden, daß diese nicht zu groß sind, d. h. die abgeschnittenen Dreiecke dürfen keine Punkte gemeinsam haben.

Es wird im Bild 3 deutlich, daß an der Stelle P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die kongruenten Dreiecke $\triangle A_{2i-2}P_iA_{2i-1}$ $(A_0 = A_2n)$ mit den Seitenlängen $\overline{A_{2i-2}P_i} = t$ und $\overline{P_iA_{2i-1}} = s$ abgeschnitten werden. Es entsteht also ein $2n$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{2n}$, welches ein Kürschaksches ist, wie man sich schnell überlegen kann.

4 Elementargeometrische Eigenschaften Kürschakscher $2n$-Ecke

4.1 Sätze über Kürschaksche $2n$-Ecke

Es folgt nun eine Auswahl von Sätzen, deren Gültigkeit mit elementaren Mitteln nachweisbar ist.

Satz 1: Jedes Kürschaksche $2n$-Eck besitzt ein Drehzentrum M und geht durch Drehung um M durch den Drehwinkel der Größe $\frac{360^\circ}{n}$ in sich über.

Satz 2: Legt man die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$ auf den Seiten eines Kürschakschen $2n$-Ecks $A_1A_2\ldots A_{2n}$ so fest, daß die Verhältnisse $\overline{A_iB_i} : \overline{A_iA_{i+1}}$ und $\overline{A_jB_j} : \overline{A_jA_{j+1}}$ jeweils konstant sind, wobei $i = 2k-1$ und $j = 2k$ $(1 \le k \le n)$ gelten soll, so ist das $2n$-Eck $B_1B_2\ldots B_{2n}$ ein Kürschaksches.

Spezialfall des Satzes: Die Seitenmittelpunkte eines Kürschakschen $2n$-Ecks ergeben wieder ein Kürschaksches $2n$-Eck.

Satz 3: Wählt man die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$ so, daß unter der Voraussetzung, daß das $2n$-Eck $A_1A_2\ldots A_{2n}$ ein Kürschaksches ist, sowohl die Dreiecke $\triangle A_1B_1A_2, \triangle A_3B_3A_4, \ldots, \triangle A_{2n-1}B_{2n-1}A_{2n}$ als auch die Dreiecke $\triangle A_2B_2A_3, \triangle A_4B_4A_5, \ldots, \triangle A_{2n}B_{2n}A_1$ gleichsinnig kongruent sind, so ist das $2n$-Eck $B_1B_2\ldots B_{2n}$ ein Kürschaksches.

Satz 4: Verlängert man die Seiten $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$ eines Kürschakschen $2n$-Ecks $(n \ge 3)$ bis zu den Schnittpunkten der Verlängerungen der Seiten $A_4A_3, A_6A_5, \ldots, A_2A_1$ und bezeichnet die Schnittpunkte mit $P_2, P_3, \ldots, P_n, P_1$, so ist $P_1P_2\ldots P_n$ ein reguläres n-Eck. Analog verhält es sich mit den Verlängerungen der Seiten $A_2A_3, A_4A_5, \ldots, A_{2n}A_1$.

Satz 5: Verbindet man die Punkte $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_1$ eines Kürschakschen $2n$-Ecks der Reihe nach miteinander, so ist das n-Eck $A_1A_3\ldots A_{2n-1}$ regulär. Analog verhält es sich mit den Punkten $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$.

Satz 6: Jedes konvexe Kürschaksche $2n$-Eck ist genau dann gleichseitig (bzw. gleichwinklig), wenn es einen echten Inkreis (bzw. Umkreis) besitzt.

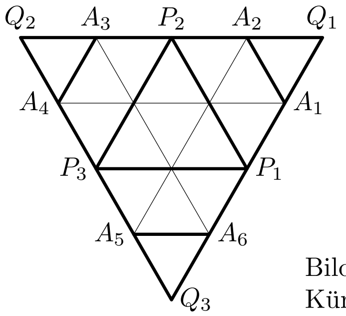
Dabei ist ein echter Inkreis derjenige Kreis, für den jede Seite des $2n$-Ecks Tangente ist. Ein echter Umkreis ist derjenige Kreis, auf dem alle Eckpunkte des $2n$-Ecks liegen.

Satz 7: Die Mittelpunkte $B_1B_2\ldots B_{2n}$ der Seiten eines gleichwinkligen (bzw. gleichseitigen) Kürschakschen $2n$-Ecks $A_1A_2\ldots A_{2n}$ bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen (bzw. gleichwinkligen) Kürschakschen $2n$-Ecks.

4.2 Spezielle gleichwinklige Kürschaksche $2n$-Ecke

Eine besondere Eigenschaft bestimmter gleichwinkliger Kürschakscher $2n$-Ecke kann man durch eine weitere Konstruktion erhalten. Dafür sei ein reguläres n-Eck P gegeben. Über jeder der n Seiten errichten wir kongruente, gleichseitige Dreiecke und bezeichnen die neu entstandenen Punkte mit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, dies entspricht Konstruktionsart 1 (Dreiecke ansetzen), und damit ist das n-Eck $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ nach Satz 5 regulär. Danach verbinden wir die Mittelpunkte derjenigen Dreieckseiten, die nicht n-Eckseiten sind, und bezeichnen diese mit $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ ist ein gleichwinkliges Kürschaksches $2n$-Eck A. Nun vergleichen wir die Maßzahlen der Flächen von P, A und Q. Wir haben herausgefunden, daß das Verhältnis für $n = 3$ und $n = 6$ rational ist.

Gleichwinkliges Kürschaksches Sechseck ($n = 3$)



Wir zerlegen das Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ in 16 kongruente Teildreiecke (s. Bild 4). So erhalten wir die Flächenmaßzahlen durch Abzählen der jeweils in P, K_6 und Q enthaltenen gleichseitigen Teildreiecke und kommen auf das Ergebnis $P : K_6 : Q = 4 : 13 : 16$.

Bild 4: Zerlegung des speziellen gleichwinkligen Kürschakschen Sechsecks durch Mittendreiecke

Gleichwinkliges Kürschaksches Zwölfeck ($n = 6$)

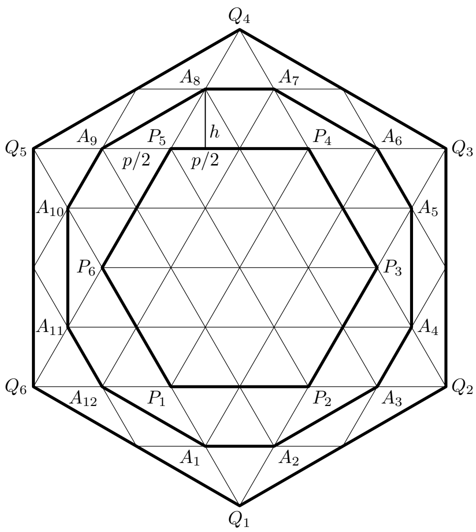


Bild 5: Zerlegung des speziellen gleichwinkligen Kürschakschen Zwölfecks durch flächengleiche Dreiecke

Analoge Überlegungen führen beim gleichwinkligen Kürschakschen Zwölfeck $A_1A_2 \ldots A_{12}$ zu dem überraschenden Flächenverhältnis $1 : 2 : 3$. Wir zerlegen alle die Seite p enthaltenden Dreiecke in Mittendreiecke (s. Bild 5). Man erhält zwei Sorten von Mittendreiecken, die gleichseitig mit der Seitenlänge $\frac{p}{2}$ bzw. die gleichschenklig mit der Schenkellänge $\frac{p}{2}$ sind. Zwei Dreiecke verschiedener Sorten sind flächengleich, da sie jeweils in Grundseite der Länge $\frac{p}{2}$ und Höhe der Länge h übereinstimmen (vergleiche Bild 5). Durch Abzählen erhält man das Verhältnis $P : K_{12} : Q = 24 : 48 : 72 = 1 : 2 : 3$.

5 Linderholmsche Vermutung

Eine sehr aktuelle Problematik in der kombinatorischen Geometrie ist die Linderholmsche Vermutung (s. [3]).
Sie besagt, daß zu jedem konvexen Bereich K in der Ebene ein rechtwinkliges Dreieck D existieren soll, in dem K vollständig enthalten ist, so daß die Fläche dieses Dreiecks maximal doppelt so groß ist wie die des konvexen Bereichs, daß also $D \leq 2K$ gilt, wenn man die Flächen mit den Bezeichnungen identifiziert. Diese Vermutung wurde unseres Wissens bisher nur in Spezialfällen bewiesen.
Wir wollten nun diese Vermutung für weitere spezielle konvexe Bereiche beweisen, indem wir Kürschaksche $2n$-Ecke in Hinsicht auf die Linderholmsche Vermutung untersuchten. Wir liefern damit einen kleinen Beitrag zur Lösung einer aktuellen Problematik.
Für die Fälle $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 8$, $n = 9$ und $n \geq 10$ haben wir bisher Konstruktionen für die Linderholmschen Dreiecke (d. h. rechtwinklige Dreiecke, die die Linderholmsche Vermutung erfüllen) gefunden.

$n = 2$

Es sei $A_1A_2A_3A_4$ das Kürschaksche Viereck mit $\overline{A_1A_2} \geq \overline{A_2A_3}$, und der kleinere der beiden Winkel liege bei A_1 bzw. A_3. Diese beiden Bedingungen lassen sich o. B. d. A. festlegen. Den Scheitelpunkt S des rechten Winkels des Linderholmschen Dreiecks erhalten wir, indem wir von A_3 auf die verlängerte Strecke A_1A_2 das Lot fällen. Der zweite Eckpunkt T_1 des Linderholmschen Dreiecks ergibt sich durch Verdoppelung der Strecke SA_3 über A_3 hinaus. Den dritten Punkt T_2 erhält man, indem man die Strecke T_1A_4 über A_4 hinaus bis zum Schnittpunkt mit der verlängerten Strecke A_2A_1 verlängert. Dieser Fall war schon bekannt, denn in [4] wurde nachgewiesen, daß man zu jedem konvexen Viereck ein Linderholmsches Dreieck finden kann.

$n = 3$

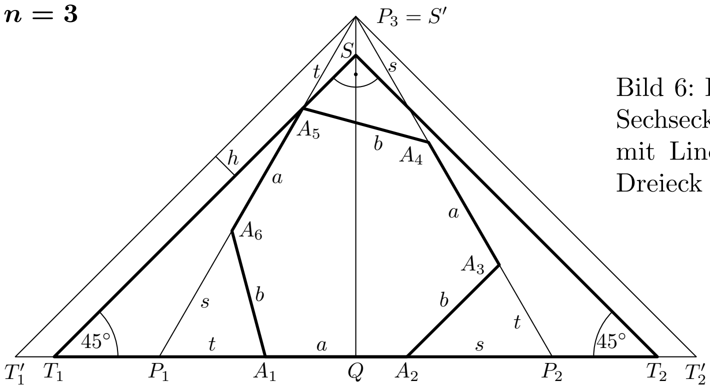


Bild 6: Kürschaksches Sechseck $A_1A_2 \ldots A_6$ mit Linderholmschem Dreieck ST_1T_2

Verlängert man bei dem Kürschakschen Sechseck $A_1A_2\dots A_6$ die Seiten A_1A_2, A_3A_4 und A_5A_6, die nicht kürzer als die anderen Sechseckseiten sind (also $a \geq b$), erhält man das gleichseitige Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ (A_1A_2 liege auf der Strecke P_1P_2). Es gelte o. B. d. A. $\overline{P_3A_5} \leq \overline{P_3A_4}$ und damit $t \leq s$. Das Hilfsdreieck $\triangle S'T_1'T_2'$ sei ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit der verlängerten Strecke P_1P_2 als Basis $T_1'T_2'$ und P_3 als Scheitelpunkt S' des rechten Winkels. Die Parallele zu $T_1'S'$ durch A_5 schneidet $T_1'T_2'$ in T_1 und das Lot von S' auf $T_1'T_2'$ in S. Die Parallele zu $S'T_2'$ durch S schneidet $T_1'T_2'$ in T_2. Das Dreieck $\triangle ST_1T_2$ ist ein gesuchtes Linderholmsches Dreieck (s. Bild 6).

Unter der Voraussetzung, daß der Punkt Q der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 ist, berechnet sich die Fläche $F_{D'}$ des Dreiecks $S'T_1'T_2'$ mit $|P_1P_2| = 1$ durch $F_{D'} = |P_3Q|^2 = \frac{3}{4}$. Die Trapeze $T_1'T_1SS'$ und $T_2T_2'S'S$ sind kongruent und haben eine Höhe $h = t\cdot\sin 15°$. Die Länge der Strecke ST_1 bzw. ST_2 ist $|S'T'_{1/2}| - 2h$, da die Schenkel jeweils mit einem Winkel von 45° anliegen. Mit $|S'T'_{1/2}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ergibt sich die Fläche F_T eines Trapezes $F_T = \frac{\sqrt{6}}{2} - h^2$. Die Fläche F_D des Dreiecks ST_1T_2 ist

$$F_D = F_{D'} - 2F_T = 2h^2 - \sqrt{6}\cdot h + \tfrac{3}{4} = 2t^2\sin^2 15° - \sqrt{6}\cdot t\cdot\sin 15° + \tfrac{3}{4}.$$

Die Fläche F_{K6} des Kürschakschen Sechsecks ist die Differenz aus der Fläche des gleichseitigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ und der drei kongruenten Dreiecke $A_6P_1A_1$, $A_2P_2A_3$ und $A_4P_3A_5$:

$$F_{K6} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\tfrac{st\cdot\sin 60°}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}(1-3st).$$

Es soll nun $2F_{K6} \geq F_D$ gelten, damit die Linderholmsche Vermutung erfüllt ist, also

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-3st) \geq 2t^2\cdot\sin^2 15° - t\cdot\sin 15°\cdot\sqrt{6} + \tfrac{3}{4}. \qquad (3)$$

Wenn man $a = 1-s-t$ und $b = \sqrt{s^2+t^2-2st\cos 60°}$ in die Voraussetzung $a^2 \geq b^2$ einsetzt und nach s umstellt, so folgt $s \leq \frac{1-2t}{2-3t}$, wobei stets $3t < 2$. Dieses in (3) eingesetzt, ergibt unter Ausnutzung von $\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$$f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \geq 0$$

mit $a_3 = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $a_2 = \frac{11}{2}\sqrt{3} - \frac{13}{2}$, $a_1 = \frac{21}{4} - 4\sqrt{3}$ und $a_0 = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$. Durch Bestimmen der Extrema von $f(t)$ kann man zeigen (mit etwas aufwendiger Rechnung), daß für $0 \leq t \leq 1$ stets $f(t) \geq 0$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] Werner Mögling: *Über Kürschaksche Zwölfecke.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubau-

er" Erfurt/Mühlhausen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, 21. Jahrgang, Heft 1, Erfurt 1985, S. 118-123.

[2] A. Florian: *On the area sum of a convex polygone and its polar reciprocal.* Mathematica Pannonica 6/1 (1995), Salzburg 1995, S. 77-84.

[3] C. Linderholm in *Intuitive Geometry.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 48, Budapest 1987, S. 698.

[4] Werner Mögling: *Über ein Problem von Linderholm: Konvexen Vierecken umbeschriebene rechtwinklige Dreiecke.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule Erfurt/Mühlhausen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 27 (1991) 1, Erfurt 1991, S. 7-19.

Wird fortgesetzt.

Stephan Trenn, Hohle 22a, 99869 Ballstädt
Christian Rebel, Großmutterleite 8, 99425 Weimar
(Kontaktadressen)