Kürschaksche $2n$-Ecke (II)

Fortsetzung des Beweises der Linderholmschen Vermutung:

$\boldsymbol{n = 4}$

Betrachtet man das Kürschaksche Achteck $A_1A_2\dots A_8$ mit den Seiten $A_{2k-1}A_{2k} = a$ und $A_{2k}A_{2k+1} = b$ (mit $1 \le k \le 4$ und $A_9 = A_1$), bei dem $a \ge b$ gelte, sowie das durch die Verlängerung von dessen Seiten a entstandene Quadrat $P_1P_2P_3P_4$ (P_1P_2 enthalte die Seite A_1A_2), so soll o. B. d. A. die Ungleichung $\overline{P_kA_{2k-2}} \ge \overline{P_kA_{2k-1}}$ ($A_0 = A_8$) gelten. Es existiert eine Gerade durch A_7, die die Strahlen P_2P_3 und P_2P_1 in T_1 bzw. T_2 schneidet, wobei der Punkt A_7 Mittelpunkt der Strecke T_1T_2 ist. Der Punkt S sei mit dem Punkt P_2 identisch. Für den Fall, daß das Kürschaksche Achteck vollständig in dem Dreieck $\triangle ST_1T_2$ enthalten ist, so ist dieses ein gesuchtes Linderholmsches Dreieck. Ist dies nicht der Fall, so betrachtet man die Gerade durch A_7A_6 und deren Schnittpunkte T_1' und T_2' mit den Strahlen P_2P_3 bzw. P_2P_1. Das Dreieck $\triangle ST_1'T_2'$ ist ein Linderholmsches Dreieck.

Für $\boldsymbol{n = 5}$ bis $\boldsymbol{n = 7}$ haben wir bisher keine Lösung allgemein rechnerisch bestätigen können. Über vom Leser gefundene Lösungen würden wir uns freuen.

$\boldsymbol{n = 8}$

Durch Verlängerung der Seite a ($a \ge b$) des Kürschakschen 16-Ecks ergibt sich das reguläre Achteck $P_1P_2\dots P_8$. Konstruiert man drei Geraden, die jeweils die Strecken P_1P_2, P_4P_5 und P_6P_7 enthalten, so ist das resultierende Dreieck ein Linderholmsches Dreieck des Kürschakschen 16-Ecks.

$\boldsymbol{n = 9}$

Verlängert man die Seite a ($a \ge b$) des Kürschakschen 18-Ecks, so ergibt sich das reguläre Neuneck $P_1P_2\dots P_9$. Zunächst konstruiere man eine Gerade durch P_1P_2. Anschließend konstruiert man eine Gerade durch den Punkt P_7, die mit der Gerade durch P_1P_2 einen Winkel von $45°$ einschließt und nicht im Inneren des regulären Neunecks verläuft. Analog konstruiert man eine Gerade durch P_5. Das resultierende Dreieck ist ein gesuchtes Linderholmsches Dreieck des Kürschakschen 18-Ecks.

$\boldsymbol{n \ge 10}$

Bei diesen Fällen betrachten wir den Umkreis des Kürschakschen $2n$-Ecks (Umkreis: kleinster Kreis, der Kürschaksches $2n$-Eck vollständig enthält, berührt im allgemeinen nur jeden zweiten Eckpunkt). Ein gesuchtes Linderholmsches Dreieck ist jenes, welches rechtwinklig, gleichschenklig ist und den Umkreis des Kürschakschen $2n$-Ecks als Inkreis besitzt.

6 Zusammenhang zwischen konkaven und konvexen Kürschakschen $2n$-Ecken

Nach Satz 2 bilden die Mittelpunkte der Seiten eines Kürschakschen $2n$-Ecks wieder ein Kürschaksches $2n$-Eck. Ausgehend von diesem Satz haben wir konkave Kürschaksche $2n$-Ecke $A_1A_2 \dots A_{2n}$ daraufhin untersucht, ob das (durch das Verbinden der Seitenmittelpunkte) entstehende Kürschaksche $2n$-Eck konvex oder ebenfalls konkav ist und welche Bedingungen entsprechend dafür gelten.

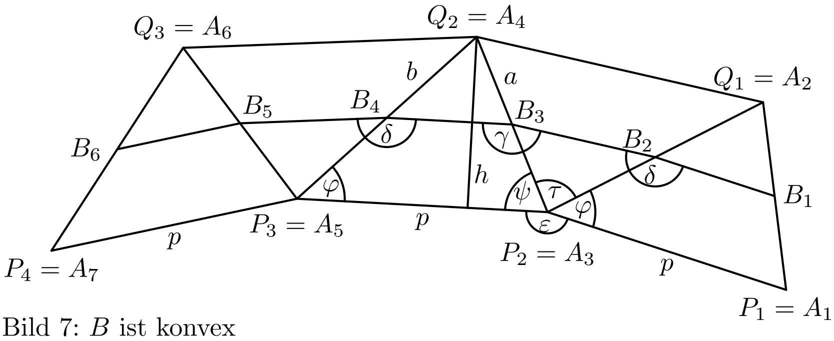

Bild 7: B ist konvex

Gegeben sei das konkave Kürschaksche $2n$-Eck A mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ und dem spitzen Winkel bei A_{2i} $(1 \leq i \leq n)$. h sei die Länge des Lotes von A_{2i} auf die Strecke $A_{2i-1}A_{2i+1}$, und ϕ sei der Winkel $\sphericalangle A_{2i}A_{2i+1}A_{2i-1}$ (s. Bild 7).

Die Seitenmittelpunkte $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$ werden miteinander verbunden, $B_1B_2 \dots B_{2n}$ ist dann nach Satz 2 ein Kürschaksches $2n$-Eck B mit den Innenwinkeln γ und δ. γ sei dabei o. B. d. A. der Winkel, der kleiner als $180°$ ist.

Die Frage lautet nun folgendermaßen: Unter welcher Bedingung ist das Kürschaksche $2n$-Eck $B_1B_2 \dots B_{2n}$ ebenfalls konkav bzw. wann wird es konvex?

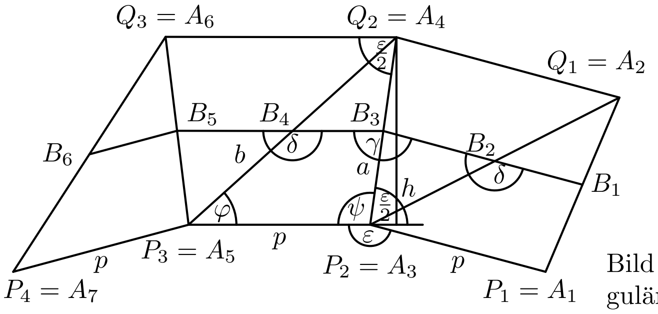

Bild 8: B ist zum regulären n-Eck entartet

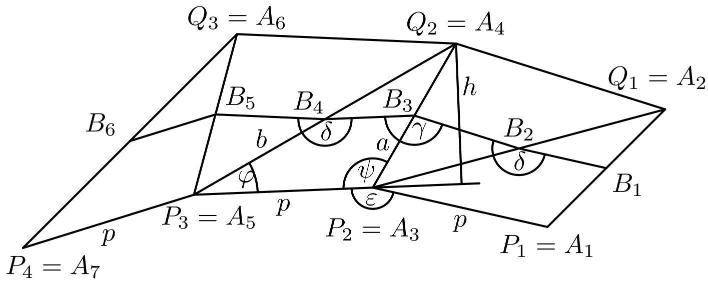

Bild 9:
B ist konkav

Mit Hilfe von Strahlensatz und Kongruenzsätzen sowie einigen Umformungen kommen wir auf folgende Beziehung zwischen ϕ, h und p:

$$h < p\left(\frac{1}{\cot\phi - \cot\frac{\epsilon}{2}}\right) \implies B \text{ ist konvex (Bild 7),}$$

$$h = p\left(\frac{1}{\cot\phi - \cot\frac{\epsilon}{2}}\right) \implies B \text{ ist zu einem regulären } n\text{-Eck entartet (Bild 8),}$$

$$h > p\left(\frac{1}{\cot\phi - \cot\frac{\epsilon}{2}}\right) \implies B \text{ ist konkav (Bild 9).}$$

7 Kürschaksche 2n-Ecke in Kunst und Alltag

Kürschaksche 2n-Ecke sind nicht nur mathematische Figuren, sondern man findet sie auch im realen Leben. Vor allem in Kunst und Gestaltung, aber auch anderweitig wurden und werden sie verwendet. Man findet überwiegend konkave (sternförmige) Kürschaksche 2n-Ecke, die zudem oft auch gleichseitig vorliegen.
Wir wollen hier einige Beispiele vorstellen, ohne jedoch auf die häufig vorkommenden Kürschakschen Vierecke, d.h. Parallelogramme, Rechtecke, Rhomben oder Quadrate einzugehen.

7.1 Sterne

Wird ein geometrischer Stern gezeichnet (s. Bild 10), so hat er meist die Form eines Kürschakschen 2n-Ecks. Die Regelmäßigkeit in Winkeln und Seiten bietet sich dafür an und sieht dazu noch harmonisch und ausgeglichen aus. Besondere Beispiele sind der Davidstern und das Pentagramm.

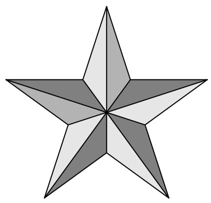

Bild 10

7.2 Wandgestaltungen

In einigen Wandgestaltungen wurden Kürschaksche 2n-Ecke verwendet, wie z. B. im Titelbild dieser $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Ausgabe (Wandgestaltung der frühen

Renaissance (entnommen aus [6, S. 42, Tafel III])). Bei dieser wurden zwei verschiedene, ein konvexes für $n = 3$ und ein konkaves für $n = 6$ (beide gleichseitig), so zueinander gelegt, daß sich ein regelmäßiges Muster ergibt. Verschiebt man sie zueinander, bis ihre Seiten aufeinander zu liegen kommen (s. Bild 11), so erkennt man, daß sich die Ebene mit diesen zwei Kürschakschen $2n$-Ecken schlicht und lückenlos auspflastern läßt. Es stellt sich nun die Frage nach einer allgemeinen Aussage zu Flächendeckungen mit Kürschakschen $2n$-Ecken.

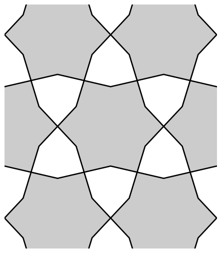

Bild 11: Kürschaksche $2n$-Ecke der Wandgestaltung

Ebenenauspflasterung mit kongruenten konvexen Kürschakschen $2n$-Ecken

Nach [5, Seite 165] gilt: „Aus konvexen Vielecken von mehr als sechs Seiten läßt sich kein Parkett herstellen.“ Der Begriff Parkett bedeutet in diesem Zusammenhang eine schlichte und lückenlose Überdeckung der Ebene mit kongruenten Bereichen.

Es bleiben damit nur noch die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ zu untersuchen.

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich das Kürschaksche Viereck bzw. das Parallelogramm; mit diesem läßt sich die Ebene immer schlicht und lückenlos auspflastern. Der Beweis ist schon bekannt. Am Fall $n = 3$, dem Kürschakschen Sechseck, ist interessant, daß sich die Ebene mit kongruenten regulären Sechsecken ausfüllen läßt, diese aber Spezialfälle Kürschakscher Sechsecke sind. Für allgemeine Kürschaksche Sechsecke existiert eine schlichte und lückenlose Ebenenauspflasterung jedoch nicht.

Ebenenauspflasterung mit verschiedenen Kürschakschen $2n$-Ecken

Mit kongruenten Kürschakschen $2n$-Ecken ($n \geq 3$) ist die Auspflasterung nicht möglich, wohl aber unter Umständen mit Hilfe zweier (oder mehrerer) verschiedener Kürschakscher $2n$-Ecke wie im vorliegenden Beispiel.

7.3 Kreissägeblatt

Das Sägeblatt einer Kreissäge (s. Bild 12) ist noch ein weiteres konkaves Kürschaksches $2n$-Eck. In diesem besonderen Fall handelt es sich weder um ein gleichseitiges noch um ein gleichwinkliges, wie es in den meisten anderen betrachteten Beispielen der Fall war.

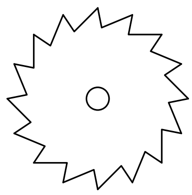

Bild 12: Kreissägeblatt (Kürschaksches 32-Eck)

8 Schlußbetrachtungen

Abschließend möchten wir bemerken, daß wir in unserer Projektarbeit noch weitere Eigenschaften Kürschakscher $2n$-Ecke untersucht haben, die hier nicht aufgezeigt werden konnten. Darüber hinaus gibt es noch viele Themen, die eine weitere Untersuchung lohnen, so z. B. die Problematik der Linderholmschen Vermutung. Außerdem läßt sich möglicherweise, wie der Leser vielleicht schon vermutet hat, die Konstruktion in 4.2., mit der man spezielle gleichwinklige Kürschaksche $2n$-Ecke erhält, auf eine allgemeine Konstruktion für Kürschaksche $2n$-Ecke erweitern.

Wir möchten uns an dieser Stelle ganz herzlich bei unserem Projektbetreuer Herrn Werner Mögling bedanken, der uns mit vielen Ratschlägen und Hinweisen zur Seite stand. Zu Dank sind wir auch unserem zweiten Projektbetreuer, Herrn H. J. Brenner, verpflichtet.

Literaturverzeichnis

[1] Werner Mögling: *Über Kürschaksche Zwölfecke.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt/Mühlhausen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, 21. Jahrgang, Heft 1, Erfurt 1985, S. 118-123.

[2] A. Florian: *On the area sum of a convex polygone and its polar reciprocal.* Mathematica Pannonica 6/1 (1995), Salzburg 1995, S. 77-84.

[3] *Intuitive Geometry.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 48, Budapest 1987, S. 698.

[4] Werner Mögling: *Über ein Problem von Linderholm: Konvexen Vierecken umbeschriebene rechtwinklige Dreiecke.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule Erfurt/Mühlhausen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 27 (1991) 1, Erfurt 1991, S. 7-19.

[5] István Reiman: *Parkette, geometrisch betrachtet.* Mathematisches Mosaik, Urania Verlag Leipzig-Jena-Berlin, 2. Auflage Leipzig 1977, S. 165-169.

[6] L. Fejes Tóth: *Reguläre Figuren.* Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Budapest 1965, S. 42, Tafel III

Stephan Trenn, Ballstädt
Christian Rebel, Weimar