

Steuerbarkeit bei distributionellen differential-algebraischen Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Elgersburg, 11. Februar 2008



- 1 Distributionelle DAEs
- 2 Steuerbarkeit
- 3 Zusammenfassung

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle
- Geschaltete Systeme (switched systems)

Differential-algebraische Gleichungen



$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad E \text{ singular} \quad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum \mathcal{L}

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle
- Geschaltete Systeme (switched systems), d.h. Koeffizienten unstetig

Erinnerung: Distributionen



Definition

- Testfunktionen:

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt} \}$$

- Distributionen:

$$\mathbb{D} := \{ D : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig} \}$$

- Distributionen mit gegebenem Träger $M \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}_M := \{ D \in \mathbb{D} \mid \text{supp } D \subseteq M \}$$

Erinnerung: Distributionen



Definition

- Testfunktionen:

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt} \}$$

- Distributionen:

$$\mathbb{D} := \{ D : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig} \}$$

- Distributionen mit gegebenem Träger $M \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}_M := \{ D \in \mathbb{D} \mid \text{supp } D \subseteq M \}$$

Satz (Distributionen mit Punkträger)

$$D \in \mathbb{D}_{\{t\}}, t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : D = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_t^{(i)}$$

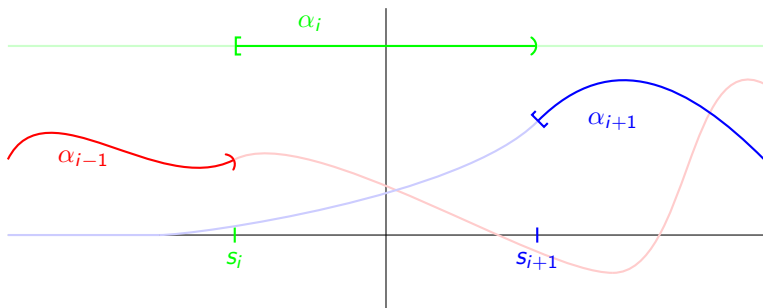
Dirac-Impulse und dessen Ableitungen: $\delta_t^{(i)}(\varphi) = (-1)^i \varphi^{(i)}(t)$

Vorbetrachtung: Stückweise glatte Funktionen



Definition (Stückweise glatte Funktionen)

$$\mathcal{C}_{\text{pw}}^{\infty} := \left\{ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \exists \text{ zulässiges } S = \{ s_i \mid i \in \mathbb{Z} \} \\ \exists (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}))^{\mathbb{Z}} : \\ \alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[s_i, s_{i+1})} \alpha_i \end{array} \right. \right\}$$

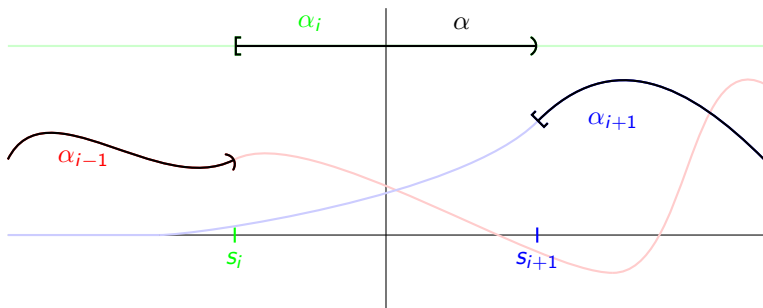


Vorbetrachtung: Stückweise glatte Funktionen



Definition (Stückweise glatte Funktionen)

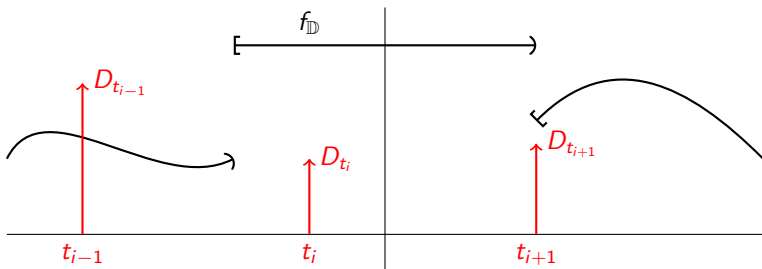
$$\mathcal{C}_{\text{pw}}^{\infty} := \left\{ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \exists \text{ zulässiges } S = \{ s_i \mid i \in \mathbb{Z} \} \\ \exists (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}))^{\mathbb{Z}} : \\ \alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[s_i, s_{i+1})} \alpha_i \end{array} \right\}$$



Lösungsraum: Stückweise glatte Distributionen

Definition (Stückweise glatte Distributionen \mathbb{D}_{pwC^∞}) $D \in \mathbb{D}_{pwC^\infty} \subset \mathbb{D}$ ist eine **stückweise glatte Distribution**: \Leftrightarrow $\exists f \in C_{pw}^\infty \quad \exists$ **zulässiges** $T \subseteq \mathbb{R} \quad \exists \{ D_t \in \mathbb{D}_{\{t\}} \mid t \in T \} :$

$$D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t$$



Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**

$$D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} \text{ und } \int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**

$$D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty} \text{ und } \int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$$

- **Punktweise Auswertung möglich:**

$$t_0 \in \mathbb{R} : \quad D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R} \text{ und } D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
 $D' \in \mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty}$ und $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich:**
 $t_0 \in \mathbb{R} : D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ und $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- **Einschränkung auf Intervalle möglich:**
 $M \subseteq \mathbb{R}$ Interval: $D_M \in \mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
 $D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$ und $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- Punktweise Auswertung möglich:**
 $t_0 \in \mathbb{R} : D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ und $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- Einschränkung auf Intervalle möglich:**
 $M \subseteq \mathbb{R}$ Interval: $D_M \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$
- Multiplikation mit **stückweise** glatten Funktionen möglich:**
 $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^\infty : \alpha D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen



Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
 $D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$ und $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich:**
 $t_0 \in \mathbb{R} : D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ und $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- **Einschränkung auf Intervalle möglich:**
 $M \subseteq \mathbb{R}$ Interval: $D_M \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$
- **Multiplikation mit **stückweise** glatten Funktionen möglich:**
 $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^\infty : \alpha D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Achtung

Definition von Einschränkung für allgemeinen Distributionen ist **nicht** möglich.

Beispiel: $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_n \delta_{d_n} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$, $d_n := \frac{(-1)^n}{n}$

Distributionelle DAE



Distributionelle DAE

$$\begin{aligned}E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X\end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über \mathcal{C}_{pw}^∞

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{pw}\mathcal{C}^\infty$

Distributionelle DAE



Distributionelle DAE

$$\begin{aligned} E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X \end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über \mathcal{C}_{pw}^∞

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{pw}\mathcal{C}^\infty$

Fußnote: Es ist sogar möglich, **distributionelle Koeffizienten** zuzulassen.

Distributionelle DAE



Distributionelle DAE

$$\begin{aligned}E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X\end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über \mathcal{C}_{pw}^∞

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{pw}\mathcal{C}^\infty$

Historische Anmerkung

Ähnliche Ansätze zu einem distributionellen Lösungsraum in *Hinrichsen* und *Prätzel-Wolters* 1980, *Cobb* 1984, *Rabier* und *Rheinboldt* 2002

„Behavior“ Sichtweise (Willems 1986)

Betrachtung des „Behaviors“ \mathcal{B} , d.h., die Menge aller Lösungstrajektorien

$$\mathcal{B} := \left\{ W = \begin{pmatrix} X \\ U \\ V \\ Y \end{pmatrix} \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})^N \mid \begin{array}{l} EX' = AX + BU + V, \\ Y = CX \end{array} \right\}$$

„Behavior“ Sichtweise (Willems 1986)

Betrachtung des „Behaviors“ \mathcal{B} , d.h., die Menge aller Lösungstrajektorien

$$\mathcal{B} := \left\{ W = \begin{pmatrix} X \\ U \\ V \\ Y \end{pmatrix} \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})^N \mid \begin{array}{l} EX' = AX + BU + V, \\ Y = CX \end{array} \right\}$$

Klassische Sichtweise - Annahmen

- **Existenz** einer Lösung für alle Inhomogenitäten V
- **Eindeutigkeit**, d.h. X_1, X_2 Lösungen für vorgegebenes U und V :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} : X_{1(-\infty, t_0)} = X_{2(-\infty, t_0)} \Rightarrow X_1 = X_2$$

Gliederung



- 1 Distributionelle DAEs
- 2 Steuerbarkeit
- 3 Zusammenfassung

Begriff der Steuerbarkeit



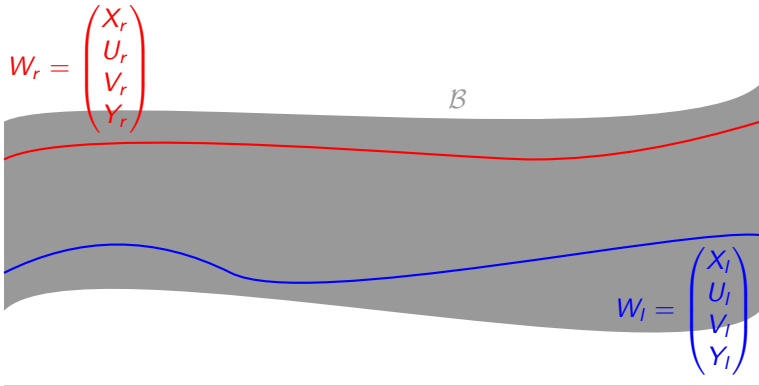
Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

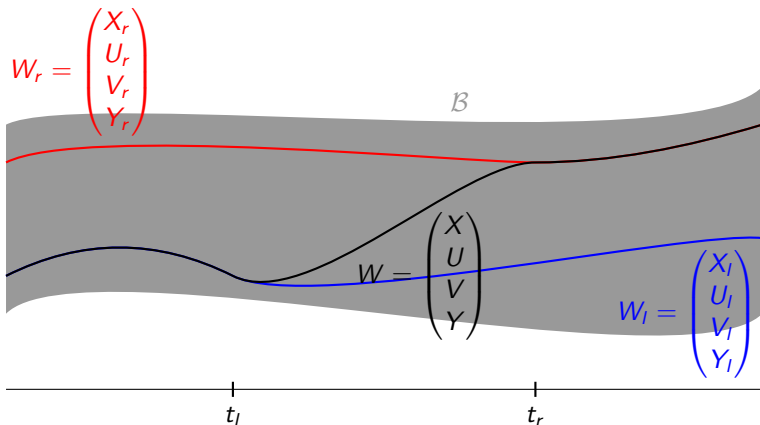
Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?



Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?



Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Steuerbarkeit im klassischen Sinne

Kann von jedem Anfangswert durch geeignete Wahl von U jeder Zustand in endlicher Zeit erreicht werden?

Begriff der Steuerbarkeit



Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Steuerbarkeit im klassischen Sinne

Kann von jedem Anfangswert durch geeignete Wahl von U jeder Zustand in endlicher Zeit erreicht werden?

Weitere Konzepte:

- R-steuerbar
- Impuls-steuerbar

Steuerbarkeit bei distributionellen DAEs



Problem

Keiner der vorgenannten Steuerbarkeitsbegriffe ist für distributionelle DAEs vollständig geeignet, denn

- distributionelle Eingänge werden nicht berücksichtigt oder
- distributionelle Zustände werden nicht berücksichtigt.

⇒ Neue Definitionen für Steuerbarkeit nötig!

Erste Ideen zur Steuerbarkeit



Definition (Sprung-Steuerbarkeit)

$EX' = AX + BU + V$ heißt **sprung-steuerbar** in $t_0 \in \mathbb{R}$

\iff

$\forall V$ aus $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$ $\forall x_0^- \in \mathbb{R}^n$ $\forall \Delta x \in \mathbb{R}^n$ \exists Steuerung U aus $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$
 \exists Lösung X des inkonsistenten AWP $EX' = AX + BU + V, X(t_0-) = x_0^-$
mit:

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

Erste Ideen zur Steuerbarkeit



Definition (Sprung-Steuerbarkeit)

$EX' = AX + BU + V$ heißt **sprung-steuerbar** in $t_0 \in \mathbb{R}$

\iff

$\forall V$ aus $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$ $\forall x_0^- \in \mathbb{R}^n$ $\forall \Delta x \in \mathbb{R}^n$ \exists Steuerung U aus $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$
 \exists Lösung X des inkonsistenten AWP $EX' = AX + BU + V, X(t_0-) = x_0^-$
mit:

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

Satz (Sprung-Steuerbarkeit für klassische ODEs)

klassische zeitinvariante ODE $x' = Ax + Bu$ steuerbar

\iff

distributionelle ODE $X' = AX + BU + V$ sprung-steuerbar

Fragestellungen zur Sprung-Steuerbarkeit



Impulsfreiheit in t_0

Lässt sich ein U finden, mit

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

und

$$X[t_0] = 0?$$

Fragestellungen zur Sprung-Steuerbarkeit



Impulsfreiheit in t_0

Lässt sich ein U finden, mit

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

und

$$X[t_0] = 0?$$

Notwendige Impuls-Ordnung vom Eingang

Was ist minimales n , so dass

$$U = u_{\mathbb{D}} + \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{t_0}^{(i)}$$

den geforderten Sprung Δx realisiert?

Weitergehende Steuerbarkeitsbegriffe



Ableitungs-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q -ten Ableitung vorgeben:

$$X^{(q)}(t_0+) - X^{(q)}(t_0-) \stackrel{!}{=} \Delta x$$

Weitergehende Steuerbarkeitsbegriffe



Ableitungs-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q -ten Ableitung vorgeben:

$$X^{(q)}(t_0+) - X^{(q)}(t_0-) \stackrel{!}{=} \Delta x$$

Stammfunktion-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q -ten Stammfunktion vorgeben:

$$\left(\underbrace{\int_{t_0} \cdots \int_{t_0}}_q X \right) (t_0+) - \left(\underbrace{\int_{t_0} \cdots \int_{t_0}}_q X \right) (t_0-) \stackrel{!}{=} \Delta x$$

Entspricht: Impulse einer bestimmten Ordnung in t_0 vorgeben!

Zusammenfassung



- Geeigneter Lösungsraum $\mathbb{D}_{\text{pwc}^\infty}$ definiert:
 - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
 - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
 - Erlaubt unstetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)

Zusammenfassung



- Geeigneter Lösungsraum $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$ definiert:
 - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
 - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
 - Erlaubt un stetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)
- Neue Steuerbarkeitsbegriffe nötig, denn:
 - Im Eingang nun auch Distributionen erlaubt
 - Steuern von Impulsen an einer Stelle

Zusammenfassung



- Geeigneter Lösungsraum $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$ definiert:
 - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
 - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
 - Erlaubt unstetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)
- Neue Steuerbarkeitsbegriffe nötig, denn:
 - Im Eingang nun auch Distributionen erlaubt
 - Steuern von Impulsen an einer Stelle
- Offene Fragen:
 - Algebraische Bedingungen für die verschiedene Steuerbarkeitskonzepte
 - „Behavior“-Sichtweise