Regularität von distributionellen DAEs

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

GAMM-FA „Dynamik und Regelungstheorie“, Salzburg, 22.09.2008, 10:20 - 10:45

Inhalt

Distributionelle DAEs

$$\underbrace{E(\cdot)}_{m\times n}\,\dot{x} = \underbrace{A(\cdot)}_{m\times n}\,x + f \qquad\qquad E \text{ singulär}$$

Distributionelle DAEs

$$\underbrace{E(\cdot)}_{m\times n}\,\dot{x} = \underbrace{A(\cdot)}_{m\times n}\,x + f \qquad\qquad E \text{ singulär}$$

„Negative" Annahmen

- Koeffizientenmatrizen zeitvariant und nicht notwendigerweise stetig
- Inhomogenität nicht notwendigerweise stetig
- Anfangswerte nicht notwendigerweise konsistent

Distributionelle DAEs

$$\underbrace{E(\cdot)}_{m\times n}\,\dot{x} = \underbrace{A(\cdot)}_{m\times n}\,x + f \qquad\qquad E \text{ singulär}$$

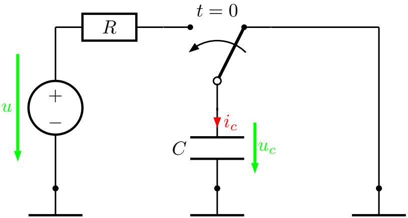
„Negative" Annahmen

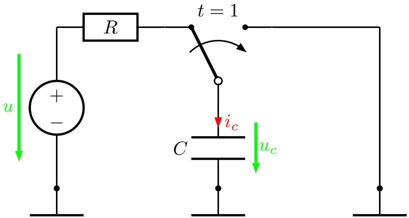
- Koeffizientenmatrizen zeitvariant und nicht notwendigerweise stetig
- Inhomogenität nicht notwendigerweise stetig
- Anfangswerte nicht notwendigerweise konsistent

Hilfsmittel: Stückweise glatte Distributionen

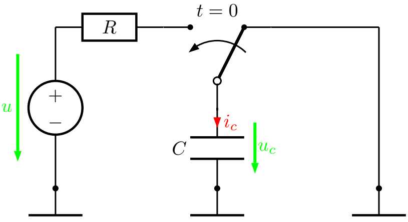
Stückweise glatte Distribution =
Stückweise glatte Funktion
+ lokal endlich viele Dirac-Impulse und deren Ableitungen

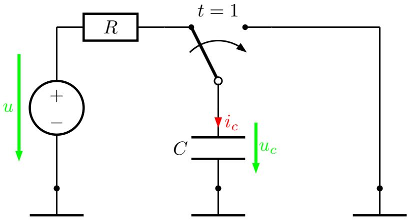
Ein einfaches Beispiel aus der „Praxis“

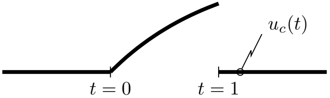




Ein einfaches Beispiel aus der „Praxis"

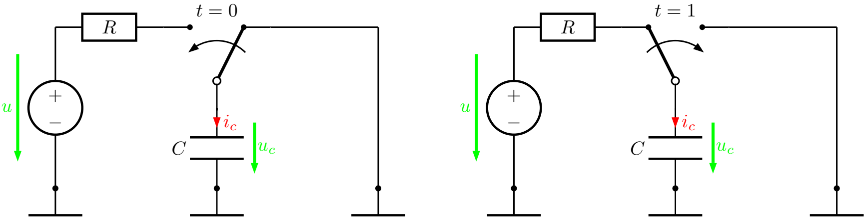


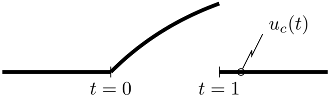




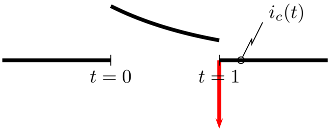
$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{auf } \mathbb{R}\backslash[0,1) \\ 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{auf } [0,1) \end{cases}$$

Ein einfaches Beispiel aus der „Praxis“





$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{auf } \mathbb{R}\setminus[0,1) \\ 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{auf } [0,1) \end{cases}$$



$$\underbrace{i_c(t)}_{=\dot{u}_c(t)} = \begin{cases} 0, & \text{auf } \mathbb{R}\setminus[0,1) \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{auf } [0,1) \\ (e^{-\frac{1}{RC}} - 1)\delta_1, & \text{bei } t = 1 \end{cases}$$

Klassische Regularität

Definition ((Klassische) Regaluritát)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt regulär
$:\Leftrightarrow$
$n = m$ und $\det(\lambda E - A) \in \mathbb{R}[\lambda] \backslash \{0\}$

Klassische Regularität

Definition ((Klassische) Regalurität)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt regulär
$:\Leftrightarrow$
$n = m$ und $\det(\lambda E - A) \in \mathbb{R}[\lambda]\backslash\{0\}$

Problem: Bedeutung für DAE $E\dot{x} = Ax + f$ zunächst unklar

Klassische Regularität

Definition ((Klassische) Regaluritat)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt regulär
$:\Leftrightarrow$
$n = m$ und $\det(\lambda E - A) \in \mathbb{R}[\lambda]\setminus\{0\}$

Problem: Bedeutung für DAE $E\dot{x} = Ax + f$ zunächst unklar

Theorem (Regularität und distributionelle Lösungen)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ regulär
$\Leftrightarrow$
jedes Anfangstrajektorienproblem

$$\begin{aligned} x_{(-\infty,0)} &= {x^0}_{(-\infty,0)} \\ (E\dot{x})_{[0,\infty)} &= (Ax+f)_{[0,\infty)} \end{aligned} \qquad \text{(ATP)}$$

hat genau eine Lösung

Klassische Regularität

Definition ((Klassische) Regaluritát)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt regulär

$:\Leftrightarrow$

$n = m$ und $\det(\lambda E - A) \in \mathbb{R}[\lambda] \setminus \{0\}$

Problem: Bedeutung für DAE $E\dot{x} = Ax + f$ zunächst unklar

Theorem (Regularität und distributionelle Lösungen)

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ regulär

$\Leftrightarrow$

jedes Anfangstrajektorienproblem

$$\begin{aligned} x_{(-\infty,0)} &= {x^0}_{(-\infty,0)} \\ (E\dot{x})_{[0,\infty)} &= (Ax + f)_{[0,\infty)} \end{aligned} \tag{ATP}$$

hat genau eine Lösung

Regularität für distributionelle DAEs

Definition: Regularität

(E, A) mit $E, A \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m\times n}$ heißt regulär
$:\Leftrightarrow$
jedes Anfangstrajektorienproblem

$$\begin{aligned} x_{(-\infty,t_0)} &= x^0_{(-\infty,t_0)} \\ (E\dot{x})_{[t_0,\infty)} &= (Ax+f)_{[t_0,\infty)} \end{aligned} \tag{ATP}$$

hat genau eine Lösung

Regularität für distributionelle DAEs

Definition: Regularität

(E, A) mit $E, A \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m\times n}$ heißt regulär
$:\Leftrightarrow$
jedes Anfangstrajektorienproblem

$$\begin{aligned} x_{(-\infty,t_0)} &= x^0_{(-\infty,t_0)} \\ (E\dot{x})_{[t_0,\infty)} &= (Ax+f)_{[t_0,\infty)} \end{aligned} \tag{ATP}$$

hat genau eine Lösung

Bemerkungen:

- x und f: stückweise glatte Distributionen
- (ATP) für allgemeine Distributionen nicht wohldefiniert!

Systemäquivalenz und Konsequenzen

Definition

$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$

$:\Leftrightarrow$

$\exists S \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}})^{m\times m}\ \exists T \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}})^{n\times n}$, beide invertierbar, mit:

$$(E_2, A_2) = (SE_1T, SA_1T - SE_1T')$$

Systemäquivalenz und Konsequenzen

Definition

$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$

$:\Leftrightarrow$

$\exists S \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m\times m}\ \exists T \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{n\times n}$, beide invertierbar, mit:

$$(E_2, A_2) = (SE_1T, SA_1T - SE_1T')$$

Bemerkungen:

- $\cong$ ist Äquivalenzrelation und „kompatibel"mit Regularität

Systemäquivalenz und Konsequenzen

Definition

$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$

$:\Leftrightarrow$

$\exists S \in (\mathcal{C}_{\text{pw}}^{\infty})^{m\times m}\ \exists T \in (\mathcal{C}_{\text{pw}}^{\infty})^{n\times n}$, beide invertierbar, mit:

$$(E_2, A_2) = (SE_1T, SA_1T - SE_1T')$$

Bemerkungen:

- $\cong$ ist Äquivalenzrelation und „kompatibel“mit Regularität
- Für $(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$ gilt

$$E_1\dot{x} = A_1x + f \quad \overset{x=Tz}{\Leftrightarrow} E_2\dot{z} = A_2z + Sf$$

Systemäquivalenz und Konsequenzen

Definition

$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$

$:\Leftrightarrow$

$\exists S \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m \times m}$ $\exists T \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{n \times n}$, beide invertierbar, mit:

$$(E_2, A_2) = (SE_1 T, SA_1 T - SE_1 T')$$

Bemerkungen:

- $\cong$ ist Äquivalenzrelation und „kompatibel“mit Regularität
- Für $(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$ gilt

$$E_1 \dot{x} = A_1 x + f \quad \overset{x=Tz}{\Leftrightarrow} \quad E_2 \dot{z} = A_2 z + Sf$$

- T hat Sprünge $\quad \Rightarrow \quad A_2$ enthält Dirac-Impulse

Systemäquivalenz und Konsequenzen

Definition

$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$

$:\Leftrightarrow$

$\exists S \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}})^{m\times m}\ \exists T \in (\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}})^{n\times n}$, beide invertierbar, mit:

$$(E_2, A_2) = (SE_1T, SA_1T - SE_1T')$$

Bemerkungen:

- $\cong$ ist Äquivalenzrelation und „kompatibel"mit Regularität
- Für $(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$ gilt

$$E_1\dot{x} = A_1x + f \quad \overset{x=Tz}{\Leftrightarrow} \quad E_2\dot{z} = A_2z + Sf$$

- T hat Sprünge $\Rightarrow$ A_2 enthält Dirac-Impulse
  $\Rightarrow$ Multiplikation von Distributionen

Notwendige Bedingungen für Regularität 1

Theorem ($n = m$)

(E, A) *mit* $E, A \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m\times n}$ *regulär*

$\Rightarrow$

$n = m$

Notwendige Bedingungen für Regularität 1

Theorem ($n = m$)

(E, A) *mit* $E, A \in (\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}})^{m\times n}$ *regulär*

$\Rightarrow$

$n = m$

Beweisidee:

- $n > m$: Mehr Variablen als Gleichungen, d.h. unterbestimmt, zeige (lokale) Uneindeutigkeit von Lösungen des ATPs
- $n < m$: Mehr Gleichungen als Variablen, d.h. überbestimmt, zeige (lokale) Nichtlösbarkeit des ATPs
- Beweis nutzt nur klassische Argumente, z.B. Theorem von Doležal

Notwendige Bedingungen für Regularität 2

Theorem („Derivative-Array“ Bedingung)

(E, A) *regulär*

$\Rightarrow$

$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}$: $\mathcal{M}^p(t+)$ *und* $\mathcal{M}^p(t-)$ *haben vollen (Zeilen-)Rang*,

$$\mathcal{M}^p := \begin{bmatrix} -A & E & & & \\ -A' & E' - A & E & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A^{(p)} & E^{(p)} - pA^{(p-1)} & pE^{(p-1)} - \binom{p}{2} A^{(p-2)} & \cdots & E \end{bmatrix}$$

Notwendige Bedingungen für Regularität 2

Theorem („Derivative-Array“ Bedingung)

(E, A) *regulär*

$\Rightarrow$

$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}$: $\mathcal{M}^p(t+)$ *und* $\mathcal{M}^p(t-)$ *haben vollen (Zeilen-)Rang*,

$$\mathcal{M}^p := \begin{bmatrix} -A & E & & & \\ -A' & E' - A & E & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A^{(p)} & E^{(p)} - pA^{(p\text{-}1)} & pE^{(p\text{-}1)} - \binom{p}{2} A^{(p\text{-}2)} & \cdots & E \end{bmatrix}$$

Beweisskizze: $\forall p \in \mathbb{N} : f^{(p)} \overset{!}{=} (E\dot{x} - Ax)^{(p)}$

$$f \overset{!}{=} E\dot{x} - Ax = [-A \quad E] \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$f' \overset{!}{=} E\ddot{x} + (E' - A)\dot{x} - A'x = [-A' \quad E' - A \quad E] \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

Notwendige Bedingungen für Regularität 3

Theorem („Impulse-Array“ Bedingung)

(E, A) *regulär*

$\Rightarrow$

$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exists P \in \mathbb{N} : \mathcal{N}^{p,P}(t+)$ *hat vollen (Zeilen-)Rang*,

$$\mathcal{N}^{p,P} := \begin{bmatrix} E & E'-A & E''-A' & \cdots & E^{(P)}-A^{(P-1)} \\ & -E & -2E'+A & \cdots & -PE^{(P-1)}+(P-1)A^{(P-2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & (-1)^p E & \cdots & (-1)^p\left(\binom{P}{p}E^{P-p}-\binom{P-1}{P-p-1}A^{(P-p-1)}\right) \end{bmatrix}$$

Notwendige Bedingungen für Regularität 3

Theorem („Impulse-Array“ Bedingung)

(E, A) *regulär*

$\Rightarrow$

$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exists P \in \mathbb{N} : \mathcal{N}^{p,P}(t+)$ *hat vollen (Zeilen-)Rang*,

$$\mathcal{N}^{p,P} := \begin{bmatrix} E & E'-A & E''-A' & \cdots & E^{(P)}-A^{(P-1)} \\ & -E & -2E'+A & \cdots & -PE^{(P-1)}+(P-1)A^{(P-2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & (-1)^p E & \cdots & (-1)^p\left(\binom{P}{p}E^{P-p}-\binom{P-1}{P-p-1}A^{(P-p-1)}\right) \end{bmatrix}$$

Beweisskizze:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left[\int \cdots \int f\right]_{t-}^{t+} \stackrel{!}{=} \left[\int \cdots \int (E\dot{x} - Ax)\right]_{t-}^{t+}$$

Spezialfall: konstante Koeffizienten

(E, A) mit $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist regulär
$\Rightarrow$
alle Matrizen

$$\begin{bmatrix} -E & A & & & & \\ & -E & A & & & \\ & & -E & A & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -E & A \end{bmatrix}$$

haben vollen (Zeilen-)Rang

Tatsächlich gilt sogar Äquivalenz (Yip und Sincovec, 1981)

ODEs und reine DAEs

Theorem

$$(E,A) = \begin{cases} (I,A) \\ (N,I) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (E,A) \textit{ regulär}$$

wobei N strikte untere Dreiecksmatrix. D.h. ATPs für

$$\dot{x} = Ax + f \qquad \textit{und} \qquad N\dot{x} = x + f$$

sind eindeutig lösbar.

ODEs und reine DAEs

Theorem

$$(E,A) = \begin{cases} (I,A) \\ (N,I) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (E,A) \text{ regulär}$$

wobei N strikte untere Dreiecksmatrix. D.h. ATPs für

$$\dot{x} = Ax + f \quad \text{und} \quad N\dot{x} = x + f$$

sind eindeutig lösbar.

Bemerkung:

- ATP für $\dot{x} = -\delta_0 x$ hat eindeutige Lösung (nämlich $x = 0$ auf $[0, \infty)$)
- Einzige *konsistente* Lösung von $N\dot{x} = x$ ist $x = 0$

ODEs und reine DAEs

Theorem

$$(E,A) = \begin{cases} (I,A) \\ (N,I) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (E,A) \textit{ regulär}$$

wobei N strikte untere Dreiecksmatrix. D.h. ATPs für

$$\dot{x} = Ax + f \quad \textit{und} \quad N\dot{x} = x + f$$

sind eindeutig lösbar.

Bemerkung:

- ATP für $\dot{x} = -\delta_0 x$ hat eindeutige Lösung (nämlich $x = 0$ auf $[0,\infty)$)
- Einzige *konsistente* Lösung von $N\dot{x} = x$ ist $x = 0$

Folgerung

$$(E,A) \cong \left(\begin{bmatrix} I & \\ & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & \\ & I \end{bmatrix} \right) \quad \Rightarrow \quad (E,A) \textit{ regulär}$$

Geschaltete Systeme

Theorem

$(E_1, A_1), (E_2, A_2)$ *regulär*

$\Rightarrow$

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad (E, A) := (E_1, A_1)_{(-\infty,t)} + (E_2, A_2)_{[t,\infty)}$ *regulär*

Geschaltete Systeme

Theorem

$(E_1, A_1), (E_2, A_2)$ *regulär*
$\Rightarrow$
$\forall t \in \mathbb{R}: \quad (E, A) := (E_1, A_1)_{(-\infty,t)} + (E_2, A_2)_{[t,\infty)}$ *regulär*

Erlaubt Studium geschalteter Systeme

$$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x + f$$

wobei $(E_1, A_1), (E_2, A_2), \ldots, (E_P, A_P)$ regulär und

$$\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, P\}$$

rechtseitig stetig mit lokal endlich vielen Sprünge

Zusammenfassung

- Definition Regularität von distributionellen DAEs
  - Wesentlicher Bestandteil: Anfangstrajektorienproblem (ATP), insbesondere inkonsistente Anfangswerte
  - Stimmt im zeitinvarianten Fall mit klassischer Definition überein
  - Kompatibel mit Systemäquivalenz
- Lösungsraum: Stückweise glatte Distributionen
  - Erlaubt distributionelle Einschränkung auf Intervalle
  - Multiplikation von Distributionen ($\delta^2 = 0$)
- Formulierung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Regularität