

Stabilität von geschalteten differential algebraischen Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

GAMM-FA „Dynamik und Regelungstheorie“, München, 28.03.2009,
10:20 - 10:45



- 1 **Einleitung**
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Destabilisierte Beispiele
- 2 **Klassische DAEs**
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen
- 3 **Distributionelle Lösungen für geschaltete DAEs**
- 4 **Stabilität von geschalteten DAEs**
 - Impulsfreiheit
 - Beliebige Schalten
 - Sprungfreies Schalten
 - Langsames Schalten

Geschaltete DAEs



Homogene geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation):

$$\text{(swDAE)} \quad E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{bzw.} \quad E_{\sigma} \dot{x} = A_{\sigma} x$$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$
 - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
 - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \dots, (E_N, A_N)$
 - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p = 1, \dots, N$
 - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \neq 0$

Motivation und Fragestellung



Wieso geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

- ① Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
- ② DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) \quad \text{oder}$$

$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}\dot{x}(t)$$

- ③ Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

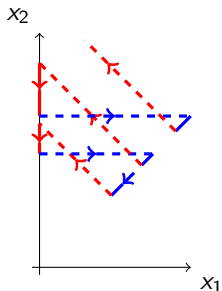
$$E_p \dot{x} = A_p x \text{ asymp. stabil } \forall p \stackrel{?}{\Rightarrow} E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \text{ asymp. stabil}$$

Beispiel 1a und 1b

Beispiel 1a:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

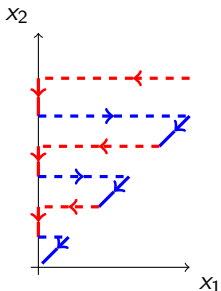
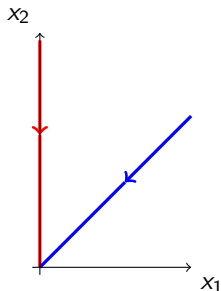
$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$



Beispiel 1b:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

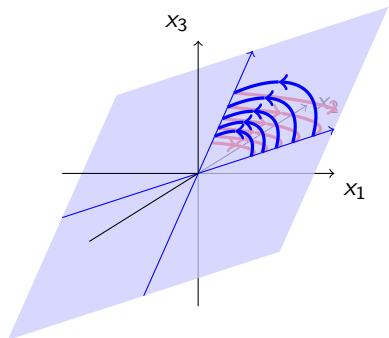
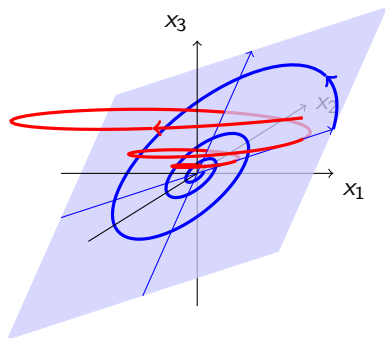


Beispiel 2



Beispiel 2:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 8\pi & 0 \\ \pi/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

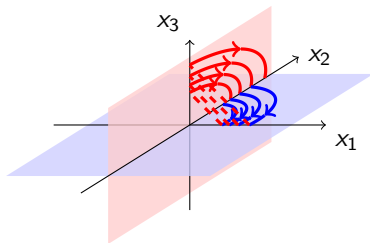
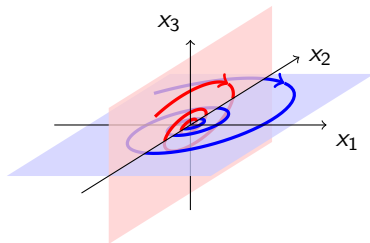


Beispiel 3



Beispiel 3:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2\pi & 0 \\ -2\pi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\pi & -1 & 4\pi \\ -1 & \pi & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$



Lösungen bei klassischen DAEs



Betrachte zunächst $E\dot{x} = Ax$.

Theorem (Weierstraß 1868)

(E, A) regulär \Leftrightarrow

$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar:

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

N nilpotent

Folgerung (für reguläre (E, A))

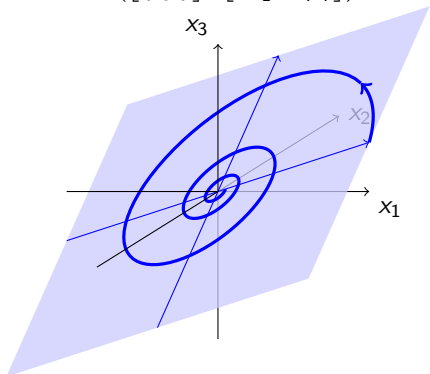
x löst $E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow$

$$x(t) = Ve^{Jt}v_0$$

$V \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $J \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{m_1}$.

Konsistenzraum: $\mathfrak{C}_{(E,A)} := \text{im } V$

$$(E, A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

Konsistenzprojektoren



Beobachtung

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Konsistente Anfangswerte: $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beliebiger Anfangswert $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konsistenter Anfangswert

Definition (Konsistenzprojektoren für reguläre (E, A))

Seien $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$:

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Bemerkung: $\Pi_{(E,A)}$ lässt sich **einfach** und **direkt** aus (E, A) berechnen

Lyapunov-Funktionen für reguläre (E, A)



Definition (Lyapunov-Funktion für $E\dot{x} = Ax$)

$Q = \overline{Q}^\top > 0$ auf $\mathcal{C}_{(E,A)}$ und $P = \overline{P}^\top > 0$ löse

$$A^\top P E + E^\top P A = -Q \quad (\text{verallgemeinerte Lyapunovgleichung})$$

Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto (Ex)^\top P Ex$

V monoton fallend entlang Lösungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= (Ex(t))^\top P E \dot{x}(t) + (E \dot{x}(t))^\top P Ex \\ &= x(t)^\top E^\top P A x(t) + x(t)^\top A^\top P Ex(t) \\ &= -x(t)^\top Q x(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Theorem (Owens & Debeljkovic 1985)

$E\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \exists$ Lyapunov-Funktion

Zwischenstand: Probleme und Lösungen



- 1 Stabilitätskriterium für einzelne DAEs $E_p \dot{x} = A_p x$
⇒ **Lyapunov-Funktionen**
- 2 **Keine klassischen Lösungen**
⇒ **Erlaube Sprünge** in Lösungen
- 3 Wie “springt” inkonsistenter Anfangswert auf konsistenten?
⇒ **Konsistenzprojektoren** $\Pi_{(E_1, A_1)}, \dots, \Pi_{(E_N, A_N)}$
- 4 Differentiation von Sprüngen
⇒ Raum der **Distributionen** als Lösungsraum
- 5 **Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten**
⇒ Raum der **stückweise glatten Distributionen**
⇒ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
⇒ Deutlich größere Systemklasse kann betrachtet werden

- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Destabilisierte Beispiele
- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen
- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
- 4 Stabilität von geschalteten DAEs
 - Impulsfreiheit
 - Beliebige Schalten
 - Sprungfreies Schalten
 - Langsames Schalten

Asymptotische Stabilität und impulsfreie Lösungen



Definition (Asymptotische Stabilität einer geschalteten DAE)

(swDAE) asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$

\forall distr. Lösungen x : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ und x ist **impulsfrei**

Im folgenden $\Pi_p := \Pi_{(E_p, A_p)}$ Konsistenzprojektor zu (E_p, A_p)

Impulsfreiheitsbedingung

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0$

Theorem (T. 2009)

(IFB) \Rightarrow *Alle Lösungen von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ impulsfrei*

Stabilität unter beliebigem Schalten



Betrachte **(swDAE)** mit zusätzlicher Annahme:

($\exists \mathbf{V}_p$): $\forall p \in \{1, \dots, N\} \exists$ Lyapunov-Funktion V_p für (E_p, A_p)

d.h. jede DAE (E_p, A_p) ist asymp. stabil

Lyapunov-Sprung-Bedingung

(LSB): $\forall p, q = 1, \dots, N \forall x \in \mathcal{C}_{(E_q, A_q)} : V_p(\Pi_p x) \leq V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

(IFB) \wedge ($\exists \mathbf{V}_p$) \wedge (LSB) \Rightarrow (swDAE) asymptotisch stabil

Beispiele 1a, 1b, 2 und 3 erfüllen **(IFB)** und **($\exists \mathbf{V}_p$)**,
aber nur 1b erfüllt **(LSB)**

Sprungfreies Schalten



Betrachte Spezialfall, dass Schalten keine Sprünge erzeugt. Für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\Sigma_{x^0} := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\} \left| \begin{array}{l} \exists \text{ Lösung } x \text{ von (swDAE)} \\ \text{mit } x(0) = x^0 \text{ und} \\ x \text{ hat keine Sprünge} \end{array} \right. \right\}$$

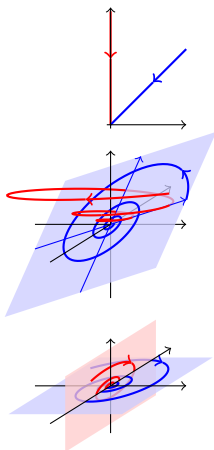
Schwache Lyapunov-Bedingung

(sLB): $\forall p, q = 1, \dots, N \forall x \in \mathcal{C}_{(E_p, A_p)} \cap \mathcal{C}_{(E_q, A_q)} : V_p(x) = V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\sigma \in \Sigma_{x^0} \wedge x$ Lösung von (swDAE) mit $x(0) = x^0 \wedge (\exists \mathbf{V}_p) \wedge$ (sLB)
 $\Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ und x impulsfrei

Anwendung auf Beispiele



Beispiele 1a und 1b:

$(\exists \mathbf{V}_p)$ und (\mathbf{sLB}) erfüllt

ABER: $\Sigma_{x^0} = \emptyset$ falls $x^0 \neq 0$

d.h.: Ergebnis nicht sinnvoll

Beispiel 2:

$(\exists \mathbf{V}_p)$ und $\Sigma_{x^0} \neq \emptyset$ für einige x^0

ABER: (\mathbf{sLB}) nicht erfüllbar

Beispiel 3:

Alle Voraussetzungen erfüllt!

\Rightarrow Alle sprunghaften Lösungen asymp. stabil

Langsames Schalten



Betrachte die Menge der langsamen Schaltsignale, $\tau > 0$:

$$\Sigma^\tau := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\} \left| \begin{array}{l} \forall \text{ Schaltzeiten} \\ t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : \\ t_{i+1} - t_i \geq \tau \end{array} \right. \right\}.$$

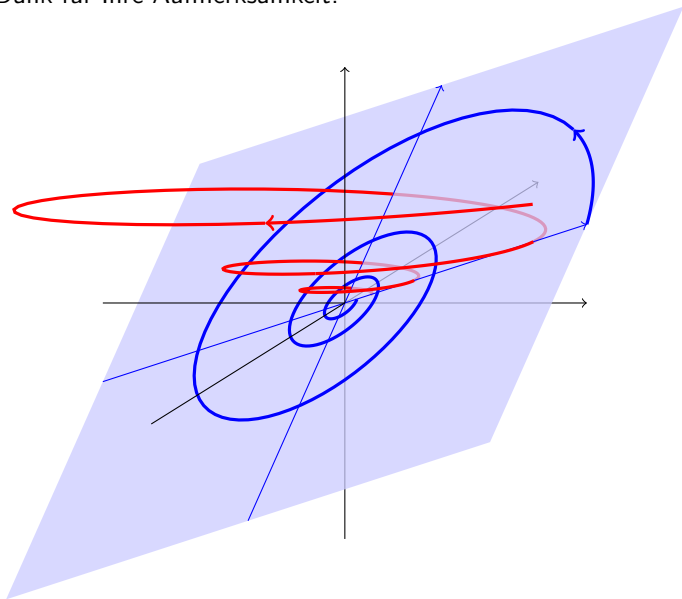
Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\exists \tau > 0 \forall \sigma \in \Sigma^\tau$: **(IFB)** \wedge $(\exists \mathbf{V}_p) \Rightarrow$ **(swDAE)** *asymptotisch stabil*

Nochmal zur Erinnerung:

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_{(E_p, A_p)})\Pi_{(E_q, A_q)} = 0$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Distributionelle Lösungen

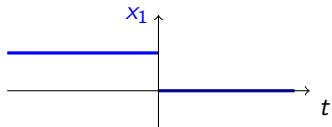


Beispiel (Inkonsistente Anfangswerte)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{array} \right) \quad \text{auf } [0, \infty)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{auf } (-\infty, 0)$$

Offensichtlich: $x_1 = \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}$



$$x_2 = \begin{cases} 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \\ \dot{x}_1 = -\delta_0, & \text{auf } [0, \infty) \end{cases}$$

also: $x_2 = \delta_0$ (Dirac Impulse)

Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen



Im folgenden: Raum der stückweise glatten Distributionen als Lösungsraum.

Betrachte nun wieder $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ mit

- $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, lokal endlich viele Sprünge
- $(E_1, A_1), \dots, (E_N, A_N)$ regulär

Theorem (T. 2009)

Für *jede Anfangstrajektorie* $x^0 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ *existiert eine eindeutige distributionelle Lösung von*

$$\begin{aligned} x &= x^0 && \text{auf } (-\infty, 0) \\ E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x && \text{auf } [0, \infty) \end{aligned}$$

Bemerkung:

x distr. Lösung von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} : x(t+) = \Pi_{(E_{\sigma(t)}, A_{\sigma(t)})} x(t-)$$

Berechnung der Konsistenzprojektoren



Theorem (Quasi-Weierstraß form, Berger, Ilchmann, T. 2009)

Sei (E, A) regulär.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &:= \mathbb{R}^n, & \mathcal{V}_{k+1} &:= A^{-1}(E\mathcal{V}_k), \quad k = 0, 1, \dots, k^* \\ \mathcal{W}_0 &:= \{0\}, & \mathcal{W}_{k+1} &:= E^{-1}(A\mathcal{W}_k), \quad k = 0, 1, \dots, k^*. \end{aligned}$$

Sei $\text{im } V = \mathcal{V}_{k^*}$, $\text{im } W = \mathcal{W}_{k^*}$ und $T := [V, W]$, $S^{-1} := [EV, AW]$ dann

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & \\ & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & \\ & I \end{bmatrix} \right).$$

Bemerkungen:

- $\mathcal{V}_k \supseteq \mathcal{V}_{k+1}$ und $\mathcal{W}_k \subseteq \mathcal{W}_{k+1}$
- V und W lassen sich mit **einfachen** Matlab-Programmen berechnen
- Also auch $\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$ einfach berechenbar

Matlab Code zum Berechnen der Konsistenzprojektoren

Berechnung einer Basis des Urbildes A^{-1} (im S):

```
function V=getPreImage(A,S)
[m1,n1]=size(A); [m2,n2]=size(S);
if m1==m2 | m2==0
    H=null([A,S]);
    V=colspace(H(1:n1,:));
end;
```

Berechnung von V mit $\text{im } V = \mathcal{V}_{k^*}$:

```
function V = getVspace(E,A)
[m,n]=size(E);
if (m==n) & size(E)==size(A)
    V=eye(n,n);
    oldsize=n; newsize=n; finished=0;
    while finished==0;
        EV=colspace(E*V);
        V=getPreImage(A,EV);
        oldsize=newsize;
        newsize=rank(V);
        finished = (newsize==oldsize);
    end;
end;
```

Berechnung von W mit $\text{im } W = \mathcal{W}_{k^*}$ analog.