

Eine Lösungstheorie für geschaltete differential-algebraische Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Oberseminar Analysis und Angewandte Mathematik,
Universität Kassel, 22.06.2009



- 1 Einleitung
- 2 Distributionen als Lösungen
- 3 Lösungstheorie von geschalteten DAEs
- 4 Impuls- und Sprungfreiheit von Lösungen

Geschaltete DAEs



Homogene geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation):

$$\text{(swDAE)} \quad E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{bzw.} \quad E_{\sigma} \dot{x} = A_{\sigma} x$$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$
 - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
 - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \dots, (E_N, A_N)$
 - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p = 1, \dots, N$
 - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \neq 0$

Motivation und Fragestellung



Warum geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

- 1 Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
- 2 DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) \quad \text{oder}$$

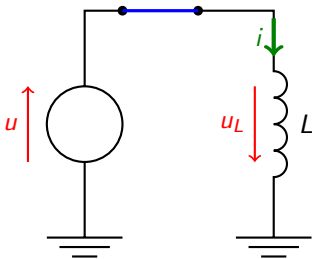
$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}\dot{x}(t)$$

- 3 Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

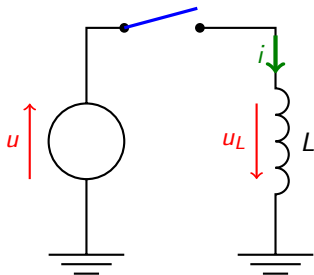
Fragestellung

- 1) Lösungstheorie
- 2) Impulsfreiheit von Lösungen

Elektrischer Schaltkreis mit Spule



$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$u_L = L \frac{d}{dt} i$ immer & Sprung in $i \Rightarrow$ Dirac-Impulse in u_L

Distributionentheorie informell



Distributionen - Überblick

- Verallgemeinerte Funktionen
- Beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ_0 ist „Ableitung“ der Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Grundsätzlich zwei formale Zugänge

- 1 Funktionalanalytisch: Dualraum eines Raumes von Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
- 2 Axiomatisch: Raum aller „Ableitungen“ von stetigen Funktionen (J.S. Silva 1954)

Distributionen - formal



Definition (Testfunktionen)

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist glatt mit kompakten Träger} \}$$

Definition (Distributionen)

$$\mathbb{D} := \{ D : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig} \}$$

Definition (Reguläre Distributionen)

$$f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): \quad f_{\mathbb{D}} : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) \in \mathbb{D}$$

Definition (Ableitung)

$$D'(\varphi) := -D(\varphi')$$

Dirac Impulse in $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{t_0} : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

Multiplikation mit Funktionen



Definition (Multiplikation mit glatten Funktionen)

$$\alpha \in \mathcal{C}^\infty : \quad \alpha D := (\varphi \mapsto D(\alpha\varphi))$$

Koeffizienten nicht glatt

$$\text{Problem: } E_\sigma, A_\sigma \notin \mathcal{C}^\infty$$

Beobachtung:

$$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z} : (E_{p_i} \dot{x})_{[t_i, t_{i+1})} = (A_{p_i} x)_{[t_i, t_{i+1})}$$

$$i \in \mathbb{Z} : \sigma_{[t_i, t_{i+1})} \equiv p_i$$

Neue Fragestellung: Einschränkung von Distributionen

Gewünschte Eigenschaften der distr. Einschränkung

Distributionelle Einschränkung:

$$\{ M \subseteq \mathbb{R} \mid M \text{ messbar} \} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad (M, D) \mapsto D_M$$

wobei für jedes messbare $M \subseteq \mathbb{R}$ gelte

- ① $D \mapsto D_M$ ist eine Projektion (linear und idempotent)
- ② $\forall f \in L_{1,\text{loc}} : (f_{\mathbb{D}})_M = (f_M)_{\mathbb{D}}$
- ③ $\forall \varphi \in C_0^\infty : \left[\begin{array}{ll} \text{supp } \varphi \subseteq M & \Rightarrow D_M(\varphi) = D(\varphi) \\ \text{supp } \varphi \cap M = \emptyset & \Rightarrow D_M(\varphi) = 0 \end{array} \right]$
- ④ $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$:

$$D_{M_1 \cup M_2} = D_{M_1} + D_{M_2}, \quad D_M = \sum_{i \in \mathbb{N}} D_{M_i}, \quad (D_{M_1})_{M_2} = 0$$

Theorem

Eine solche distributionelle Einschränkung existiert nicht

Dilemma und Lösung



Geschaltete DAEs

- Beispiele: distributionelle Lösungen
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten
- Oder: Einschränkungen auf Intervalle

Distributionen

- distributionelle Einschränkung nicht möglich
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten unmöglich
- Anfangswertprobleme können nicht formuliert werden

Zugrundeliegendes Problem

Raum der Distributionen **zu groß**.

Definition (Stückweise glatte Distributionen \mathbb{D}_{pwC^∞})

$$\mathbb{D}_{pwC^\infty} := \left\{ f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \mid \begin{array}{l} f \in C_{pw}^\infty, \\ T \subseteq \mathbb{R} \text{ locally finite,} \\ \forall t \in T : D_t = \sum_{i=0}^{n_t} a_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right\}$$

Eigenschaften von $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$



- C_{pw}^∞ „ \subseteq “ $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$
- $D \in \mathbb{D}_{pw}C^\infty \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{pw}C^\infty$
- Einschränkung $\mathbb{D}_{pw}C^\infty \rightarrow \mathbb{D}_{pw}C^\infty$, $D \mapsto D_M$ für alle Intervalle $M \subseteq \mathbb{R}$ wohldefiniert
- Multiplikation mit C_{pw}^∞ -Funktionen wohldefiniert
- Links- und rechtsseitige Auswertung an $t \in \mathbb{R}$: $D(t-), D(t+)$
- Impuls bei $t \in \mathbb{R}$: $D[t]$

Anwendung auf (swDAE)

x löst (swDAE) $\Leftrightarrow x \in (\mathbb{D}_{pw}C^\infty)^n$ und (swDAE) gilt in $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$

Relevante Fragestellung



Betrachte $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$.

- Existenz von Lösungen?
- Eindeutigkeit von Lösungen?
- Verhalten bei inkonsistenten Anfangswerten?
- Analyse von Sprüngen und Impulsen in Lösungen?
- Bedingungen für die Impuls- bzw. Sprungfreiheit von Lösungen?

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit)

$\forall x^0 \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})^n \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \exists! x \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})^n$:

$$\begin{aligned} x_{(-\infty, t_0)} &= x^0_{(-\infty, t_0)} \\ (E_\sigma \dot{x})_{[t_0, \infty)} &= (A_\sigma x)_{[t_0, \infty)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Lösung x heißt konsistent genau dann, wenn $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ auf ganz \mathbb{R} .

- 1 Einleitung
- 2 Distributionen als Lösungen
- 3 Lösungstheorie von geschalteten DAEs
- 4 Impuls- und Sprungfreiheit von Lösungen

Konsistenzprojektor



Zu (E_i, A_i) wähle S_i, T_i invertierbar mit

$$(S_i E_i T_i, S_i A_i T_i) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

Definition (Konsistenzprojektor)

$$\Pi_i := T_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_i^{-1}$$

Theorem

Für alle Lösungen x von (swDAE) gilt

$$x(t+) = \Pi_{\sigma(t)} x(t-)$$

Impuls- und Sprungfreiheit

Theorem (Impulsfreiheit)

Für (swDAE) gelte

$$\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0,$$

dann ist jede (konsistente) Lösung $x \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})$ impulsfrei.

Wesentliche Beweisidee:

$$x(t+) - x(t-) \in \text{im}(I - \Pi_p)\Pi_q \text{ und } E_p\dot{x}[t] = 0 \Rightarrow x[t] = 0.$$

Theorem (Sprungfreiheit)

Für (swDAE) gelte

$$\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : (I - \Pi_p)\Pi_q = 0,$$

dann ist jede (konsistente) Lösung $x \in (\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty})$ sprung- und impulsfrei.

Beispiel



$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sprünge? } (I - \Pi_1)\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (I - \Pi_2)\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Impulse? } E_1(I - \Pi_1)\Pi_2 = 0, \quad E_2(I - \Pi_2)\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung und Ausblick



Zusammenfassung:

- Motivation für geschaltete DAE (swDAE)
- Distributionelle Lösung: Nötig, aber zugleich unmöglich
- Lösung: Stückweise glatte Distributionen
- Anwendung der Lösungstheorie: Bedingungen für Impulsfreiheit von Lösungen

Ausblick und weitergehende Resultate

- Multiplikation für $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$ definiert, z.B. $\delta_t^2 = 0$
- DAEs $E\dot{x} = Ax + f$ mit distributionellen Koeffizienten können untersucht werden, z.B. $\dot{x} = \delta_0 x$
- Stabilitätsuntersuchungen