Detection of Impulsive Effects in Switched DAEs with Applications to Power Electronics Reliability Analysis

Alejandro D. Domínguez-García and Stephan Trenn

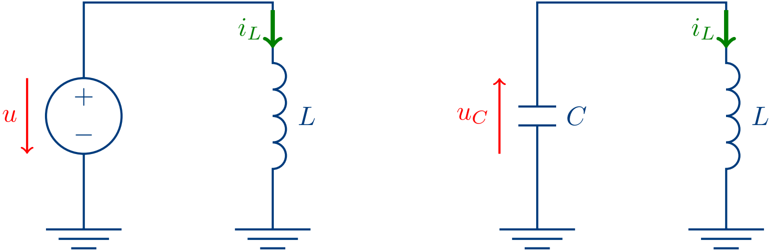
49th IEEE Conference on Decision and Control
Friday, December 17, 2010, 11:20–11:40, Atlanta, USA

ILLINOIS
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Content

Standard modeling of circuits

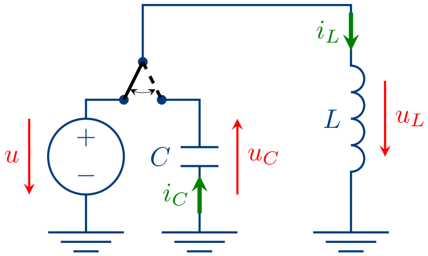


$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = \frac{1}{L} u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = -\frac{1}{L} u_C$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C = \frac{1}{C} i_L$$

General form: $\dot{x} = Ax + Bu$

Switched ODE?



Mode 1: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = \frac{1}{L} u$

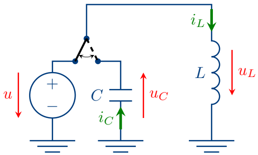
Mode 2: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = -\frac{1}{L} u_C$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C = \frac{1}{C} i_L$

No switched ODE

Not possible to write as $\boxed{\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x + B_{\sigma(t)} u}$.

Include algebraic equations in description



With $x := (i_L, u_L, i_C, u_C)$ write each mode as:

$$E_p \dot{x} = A_p x + B_p u$$

Algebraic equations $\Rightarrow$ E_p singular

Mode 1: $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = u_L,\ C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C = i_C,\ 0 = u_L - u,\ 0 = i_C$

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Mode 2: $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = u_L,\ C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C = i_C,\ 0 = i_L - i_C,\ 0 = u_L + u_C$

Switched DAEs

DAE = Differential algebraic equation

Switched DAE

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \qquad \textbf{(swDAE)}$$

or short $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$

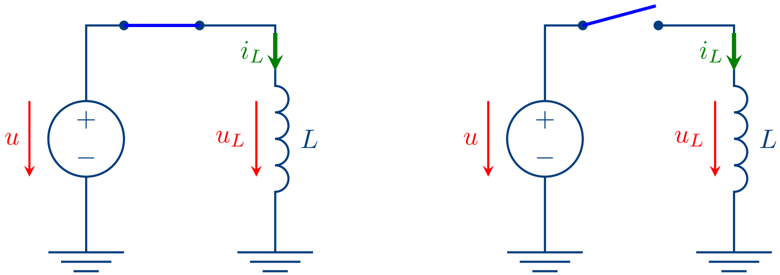
with

- switching signal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\}$
  - piecewise constant
  - locally finitely many jumps
- modes $(E_1, A_1, B_1), \ldots, (E_\mathrm{p}, A_\mathrm{p}, B_\mathrm{p})$
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = 1, \ldots, \mathrm{p}$
  - $B_p : \mathbb{R}^{n\times m}$, $p = 1, \ldots, \mathrm{p}$
- input $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Problem

Jumps and impulses in solution.

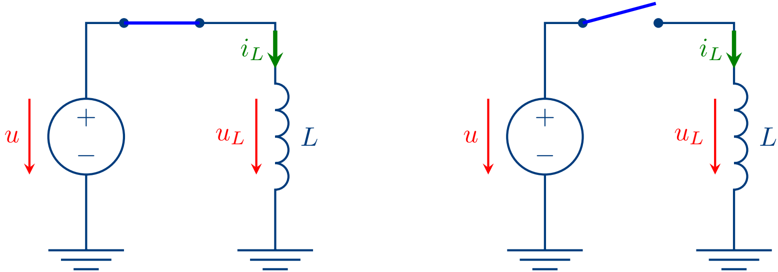
Impulse example



inductivity law: $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = u_L$

switch dependent: $0 = u_L - u$ or $0 = i$

Impulse example



$x = [i_L, u_L]^\top$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$x = [i_L, u_L]^\top$

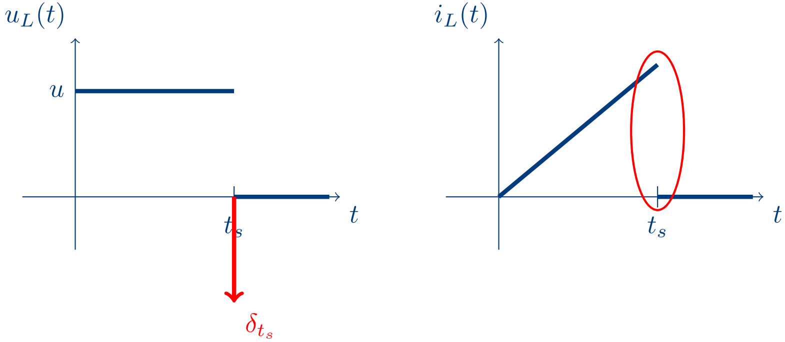
$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Solution of example

$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = u_L,\qquad 0 = u_L - u$ or $0 = i_L$

Assume: u constant, $i_L(0) = 0$

switch at $t_s > 0$: $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t < t_s \\ 2, & t \geq t_s \end{cases}$



Content

Impulse detection algorithm

1. Identify switches and possible faults in electrical circuit
2. Treat constant sources as states via $\dot{u} = 0$
3. Treat sinusoidal sources as states via $\dot{u} = \omega v$, $\dot{v} = -\omega u$
4. Model each configuration as $E_p \dot{x} = A_p x$, $p \in \{1, \dots, \mathtt{p}\}$, same x!
5. Check regularity of (E_p, A_p)
6. Calculate Wong sequences $\mathcal{V}_i$ and $\mathcal{W}_i$ for each (E_p, A_p)
7. Calculate the consistency projectors $\Pi_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for each (E_p, A_p)
8. Check the Impulse Freeness Condition (IFC):

$$\boxed{E_q (I - \Pi_q) \Pi_p = 0}$$

Regularity of matrix pairs (E, A)

Definition (Regularity of (E, A))

(E, A) regular $\quad\Leftrightarrow\quad \det(sE - A) \not\equiv 0.$

Theorem (Characterizations of regularity)

The following statements are equivalent:

- (E, A) *is regular.*
- x *solves* $E\dot{x} = Ax$ *and* $x(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad x \equiv 0$.
- $\exists S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertible which yield quasi-Weierstrass form*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right), \qquad \textbf{(QWF)}$$

where N is a nilpotent matrix.

Wong sequences and the quasi-Weierstrass form

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right), \qquad \textbf{(QWF)}$$

Theorem ([Armentano '86], [Berger, Ilchmann, T. '10])

For regular (E, A) define the Wong sequences

$$\mathcal{V}^{i+1} := A^{-1}(E\mathcal{V}^i), \qquad \mathcal{V}^0 := \mathbb{R}^n,$$
$$\mathcal{W}^{i+1} := E^{-1}(A\mathcal{W}^i), \qquad \mathcal{W}^0 := \{0\}.$$

Then $\mathcal{V}^i \overset{\text{finite}}{\to} \mathcal{V}^*$ and $\mathcal{W}^i \overset{\text{finite}}{\to} \mathcal{W}^*$. Choose V, W such that $\operatorname{im} V = \mathcal{V}^*$ and $\operatorname{im} W = \mathcal{W}^*$ than

$$T := [V, W], \quad S := [EV, AW]^{-1}$$

*yield (**QWF**).*

Matlab code for calculating the Wong sequences

Calculating a basis of the pre-image $A^{-1}(\operatorname{im} S)$:

```
function V=getPreImage(A,S)
[m1,n1]=size(A); [m2,n2]=size(S);
if m1==m2 | m2==0
    H=null([A,S]);
    V=colspace(H(1:n1,:));
end;
```

Calculating V with $\operatorname{im} V = \mathcal{V}_{k^*}$:

```
function V = getVspace(E,A)
[m,n]=size(E);
if (m==n) & size(E)==size(A)
    V=eye(n,n);
    oldsize=n; newsize=n; finished=0;
    while finished==0;
       EV=colspace(E*V);
       V=getPreImage(A,EV);
       oldsize=newsize;
       newsize=rank(V);
       finished = (newsize==oldsize);
    end;
end;
```

Analog calculation of W with $\operatorname{im} W = \mathcal{W}_{k^*}$.

Consistency projector

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \qquad \textbf{(QWF)}$$

Definition (Consistency projector)

Let (E, A) be regular with **(QWF)**, consistency projector:

$$\Pi_{(E,A)} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

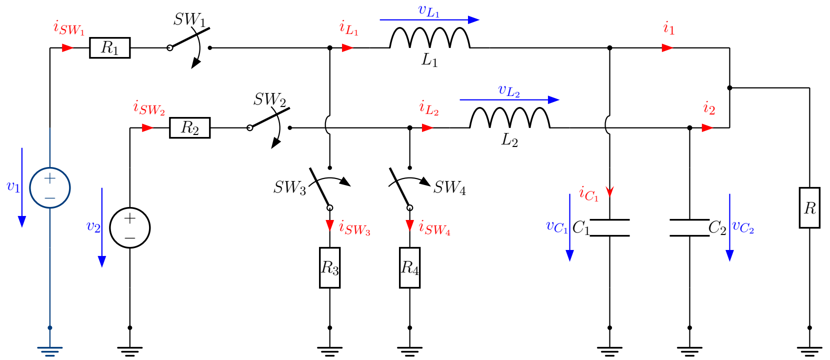
Theorem

x *solves* $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+) = \Pi_{(E_q, A_q)} x(t-), \quad q := \sigma(t+)$$

Content

Dual buck converter model



ON: SW_1 closed SW_2 closed SW_3 open SW_4 open
OFF: SW_1 open SW_2 open SW_3 closed SW_4 closed

Faults: Other switch positions & Short-circuit in C_1

Step 1 ✓

DAE description

ON configuration $(E_{\mathsf{ON}}, A_{\mathsf{ON}})$:

$$\left(\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&L_1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&L_2&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&C_2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&C_1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-R&-R&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
-1&0&1&0&1&0&0&0&R_1&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&1&0&1&0&0&0&R_2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}\right)$$

Step 2, Step 3, Step 4 ✓

Check regularity: $\det(sE_p - A_p) \not\equiv 0$, $p = 0, \ldots, 31$ Step 5 ✓

Calculate Wong sequences Step 6 ✓

Calculate consistency projectors Π_p, $p = 0, \ldots, 31$ Step 7 ✓

Impulse Freeness Check (Step 8)

Check for each $p, q \in \{0, \ldots 31\}$ whether $E_q(I - \Pi_q)\Pi_p = 0$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
1	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
2	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
3	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
4	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
5	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
6	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
7	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
8	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
9	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
10	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
11	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
12	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
13	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
14	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
15	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
16	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
17	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
18	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
20	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
21	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
22	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
23	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
24	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
25	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
26	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
27	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
28	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
29	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
30	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□
31	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	□	□

Conclusion: Algorithm revisited

1. Identify switches and possible faults in electrical circuit
2. Treat constant sources as states via $\dot{u} = 0$
3. Treat sinusoidal sources as states via $\dot{u} = \omega v$, $\dot{v} = -\omega u$
4. Model each configuration as $E_p \dot{x} = A_p x$, $p \in \{1, \dots, \mathtt{p}\}$
5. Check regularity of (E_p, A_p)
6. Calculate Wong sequences $\mathcal{V}_i$ and $\mathcal{W}_i$ for each (E_p, A_p)
7. Calculate the consistency projectors $\Pi_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for each (E_p, A_p)
8. Check the Impulse Freeness Condition (IFC):

$$E_q (I - \Pi_q) \Pi_p = 0$$

Highlights:

- Easily implentable
- Works with symbolic entries in the matrices