

# Beobachtbarkeit von geschalteten DAEs

Stephan Trenn (gemeinsam mit Aneel Tanwani)

Institut für Mathematik, Universität Würzburg, Deutschland

Treffen des Gamm-FA “Dynamik und Regelungstheorie”  
Linz, Österreich, 18.03.2011



DAE = Differential algebraic equation

- 1 Einleitung
  - Systemklasse
  - Beispiel
- 2 Das Einmal-Schalten Ergebnis
- 3 Das Ergebnis erklärt
  - Der Unterraum  $\mathcal{C}_-$
  - Der Unterraum  $\ker O_-$
  - The space  $\ker O_-^+$
  - Der Unterraum  $\ker O_+^{\text{imp}-}$
- 4 Weiterführende Ergebnisse
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Mehrere Schaltvorgänge
- 5 Zusammenfassung

## Geschaltete lineare DAE (swDAE)

$$\begin{aligned}
 E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t) & \text{oder kurz} & & E_{\sigma} \dot{x} &= A_{\sigma} x + B_{\sigma} u \\
 y(t) &= C_{\sigma(t)} x(t) + D_{\sigma(t)} u(t) & & & y &= C_{\sigma} x + D_{\sigma} u
 \end{aligned}$$

mit

- **Schaltsignal**  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} =: \bar{p}$ 
  - stückweise konstant
  - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizen­tupel  $(E_1, A_1, B_1, C_1, D_1), \dots, (E_p, A_p, B_p, C_p, D_p)$ 
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_p \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D_p \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $p \in \bar{p}$
  - $(E_p, A_p)$  **regulär**, d.h.  $\det(E_p s - A_p) \neq 0$ ,  $p \in \bar{p}$

# Motivation



Wieso geschaltete DAEs 
$$\begin{aligned} E_{\sigma} \dot{x} &= A_{\sigma} x + B_{\sigma} u \\ y &= C_{\sigma} x + D_{\sigma} u \end{aligned} ?$$

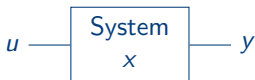
- **Modellierung** elektrischer Schaltkreise
  - mit extern gesteuerten Schaltern
    - ⇒ **bekanntes oder beeinflussbares Schaltsignal**
  - mit möglichen Fehlerszenarien (z.B. Kurzschlüsse)
    - ⇒ **unbekanntes Schaltsignal**
  - Kombination aus beiden
- **Approximation** mit stückweise konstante DAEs (**Theorie?!**)
  - von zeitvarianten (linearen) DAEs

$$E(t)\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x + D(t)u$$

- durch Arbeitspunkt-Linearisierung eines impliziten Systems

$$F(x, \dot{x}, u) = 0, \quad y = H(x, u)$$

# Globale Beobachtbarkeit von geschalteten DAEs



## Definition (Globale Beobachtbarkeit)

(swDAE) ist (global) beobachtbar  $:\Leftrightarrow$

$\forall$  Lösungen  $(u_1, x_1, y_1), (u_2, x_2, y_2)$  :  $(u_1, y_1) \equiv (u_2, y_2) \Rightarrow x_1 \equiv x_2$

## Proposition (0-Unterscheidbarkeit)

(swDAE) ist beobachtbar genau dann, wenn,

$$y \equiv 0 \text{ und } u \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0.$$

Betrachte deshalb im Folgenden (swDAE) ohne Eingänge:

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned}$$

und die Beobachtbarkeitsfrage:

$$y \equiv 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} x \equiv 0$$

# Motivierendes Beispiel

System 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = x_3, \dot{y} = \dot{x}_3 = 0, x_2 = 0, \dot{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \text{ unbeobachtbar}$$

System 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = x_3 = \dot{x}_1, x_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 \text{ unbeobachtbar}$$

$$\sigma(\cdot) : 1 \rightarrow 2$$

Sprung in  $x_1$  erzeugt Impuls in  $y$   
 $\Rightarrow$  Beobachtbarkeit

$$\sigma(\cdot) : 2 \rightarrow 1$$

Sprung in  $x_2$  lässt  $y$  unbeeinflusst  
 $\Rightarrow x_2$  bleibt unbeobachtbar

Fragestellung

$$E_p \dot{x} = A_p x + B_p u \quad \text{nicht} \quad \Rightarrow \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u \quad \text{beobachtbar}$$

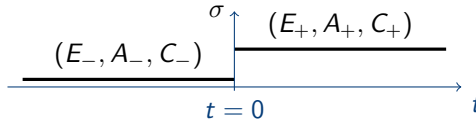
$$y = C_p x + D_p u \quad \text{beobachtbar} \quad \Rightarrow \quad y = C_\sigma x + D_\sigma u \quad \text{beobachtbar}$$

# Inhalt



- 1 Einleitung
  - Systemklasse
  - Beispiel
- 2 Das Einmal-Schalten Ergebnis
- 3 Das Ergebnis erklärt
  - Der Unterraum  $\mathcal{E}_-$
  - Der Unterraum  $\ker O_-$
  - The space  $\ker O_-^+$
  - Der Unterraum  $\ker O_+^{\text{imp}-}$
- 4 Weiterführende Ergebnisse
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Mehrere Schaltvorgänge
- 5 Zusammenfassung

# Hauptergebnis



## Theorem (Beobachtbarkeit)

(swDAE) mit einmaligem Schalten ist beobachtbar *genau dann, wenn*

$$\{0\} = \mathfrak{e}_- \cap \ker O_- \cap \ker O_+^- \cap \ker O_+^{\text{imp}-}$$

Was sind diese Unterräume?



# Inhalt



- 1 Einleitung
  - Systemklasse
  - Beispiel
- 2 Das Einmal-Schalten Ergebnis
- 3 Das Ergebnis erklärt
  - Der Unterraum  $\mathcal{C}_-$
  - Der Unterraum  $\ker O_-$
  - The space  $\ker O_-^+$
  - Der Unterraum  $\ker O_+^{\text{imp}-}$
- 4 Weiterführende Ergebnisse
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Mehrere Schaltvorgänge
- 5 Zusammenfassung

# Lösungen ungeschalteter DAEs

Betrachte **ungeschaltete** DAE

$$E\dot{x} = Ax.$$

Theorem (Weierstraß 1868)

$(E, A)$  regulär  $\Leftrightarrow$

$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar:

$$(SET, SAT) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

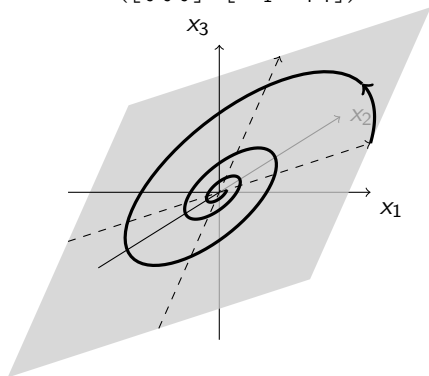
$N$  nilpotent

Folgerung (für  $(E, A)$  regulär)

$$x \text{ löst } E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow x(t) = T \begin{pmatrix} e^{Jt} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

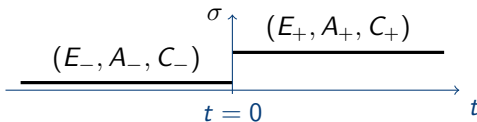
$$\text{Konsistenzraum: } \mathfrak{C}_{(E,A)} := T \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(E, A) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & * \\ 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

# Der Unterraum $\mathcal{E}_-$



## Eigenschaften der Lösung

$x$  löst  $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ , dann gilt

- $x \equiv 0 \Leftrightarrow x(0-) = 0$
- $x(0-) \in \mathcal{E}_- := \mathcal{E}_{(E_-, A_-)}$

Erinnerung:

$$(S_- E_- T_-, S_- A_- T_-) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_- \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{E}_{(E_-, A_-)} = T_- \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Der Differential-Projektor

Seien  $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar mit  $(SET, SAT) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$ .

Definition (Differential-“Projektor”)

$$\Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S \quad \text{und} \quad A^{\text{diff}} := \Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} A$$

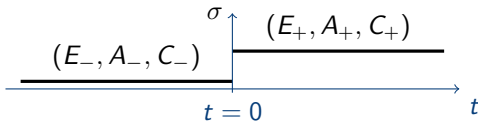
Folgende Implikation gilt:

$$x \text{ löst } E\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = A^{\text{diff}}x$$

Also, mit  $y = Cx$ ,

$$y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) \in \ker[C/CA^{\text{diff}}/C(A^{\text{diff}})^2/\dots/C(A^{\text{diff}})^{n-1}]$$

# Die Unterräume $O_+$ und $O_-$



Also

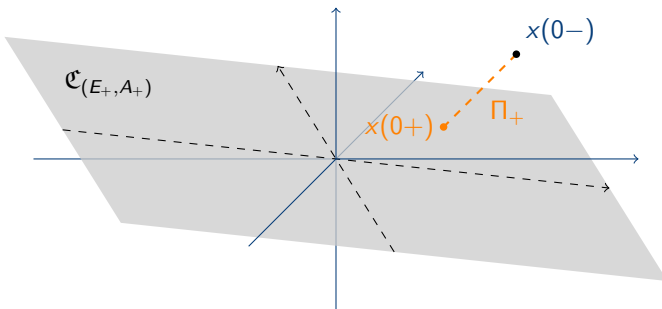
$$Y_{(-\infty, 0)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(0-) \in \ker \underbrace{[C_- / C_- A_-^{\text{diff}} / C_- (A_-^{\text{diff}})^2 / \dots / C_- (A_-^{\text{diff}})^{n-1}]}_{:= O_-}$$

und

$$Y_{(0, \infty)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(0+) \in \ker \underbrace{[C_+ / C_+ A_+^{\text{diff}} / C_+ (A_+^{\text{diff}})^2 / \dots / C_+ (A_+^{\text{diff}})^{n-1}]}_{:= O_+}$$

Frage:  $x(0+) \in \ker O_+ \quad \Rightarrow \quad x(0-) \in ?$

# Konsistenz-Projektor und $O_+^-$



Angenommen  $(S_+ E_+ T_+, S_+ A_+ T_+) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$ :

## Konsistenz-Projektor

$x(0+) = \Pi_+ x(0-)$  wobei

$$\Pi_+ := T_+ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_+^{-1}$$

$$x(0+) \in \ker O_+$$

$$\Rightarrow x(0-) \in \Pi_+^{-1} \ker O_+ = \ker \underbrace{O_+ \Pi_+}_{=: O_+^-}$$

# Hauptergebnis erneut betrachtet



## Erinnerung an das Hauptresultat

(swDAE) mit **einmaligem Schalten** ist beobachtbar genau dann, wenn

$$\{0\} = \mathfrak{C}_- \cap \ker O_- \cap \ker O_+^- \cap \ker O_+^{\text{imp}-}.$$

Bisher:

$$y_{(-\infty,0)} = 0 \wedge y_{(0,\infty)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0-) \in \mathfrak{C}_- \cap \ker O_- \cap \ker O_+^-$$

wobei

$$O_- = [C_- / C_- A_-^{\text{diff}} / C_- (A_-^{\text{diff}})^2 / \dots / C_- (A_-^{\text{diff}})^{n-1}]$$

und

$$O_+^- = [C_+ / C_+ A_+^{\text{diff}} / C_+ (A_+^{\text{diff}})^2 / \dots / C_+ (A_+^{\text{diff}})^{n-1}] \Pi_+$$

# Der impulsive Effekt

Angenommen  $(S_+ E_+ T_+, S_+ A_+ T_+) = \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$ :

## Definition (Impuls-“Projektor”)

$$\Pi_+^{\text{imp}} := T_+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S_+ \quad \text{und} \quad E_+^{\text{imp}} := \Pi_+^{\text{imp}} E_+$$

Impulsiver Anteil der Lösung:

$$x[0] = \sum_{i=0}^{n-1} (E_+^{\text{imp}})^{i+1} (x(0+) - x(0-)) \delta_0^{(i)}$$

Dirac Impulse

Schlussfolgerung:

$$y[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_+ x[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0+) - x(0-) \in \ker O_+^{\text{imp}}$$

wobei

$$O_+^{\text{imp}} := [C_+ E_+^{\text{imp}} / C_+ (E_+^{\text{imp}})^2 / \dots / C_+ (E_+^{\text{imp}})^{n-1}]$$



# Der unbeobachtbare Unterraum

$x(0+) = \Pi_+ x(0-)$  und  $x(0+) - x(0-) \in \ker O_+^{\text{imp}}$  ergibt

$$x(0-) \in (\Pi_+ - I)^{-1} \ker O_+^{\text{imp}} = \ker \underbrace{O_+^{\text{imp}} (\Pi_+ - I)}_{=: O_+^{\text{imp}-}}$$

Zusammengefasst:

$$y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(0-) \in \mathcal{M} := \mathfrak{C}_- \cap \ker O_- \cap \ker O_+^- \cap \ker O_+^{\text{imp}-}$$

## Theorem (Unbeobachtbarer Unterraum)

$$y \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(0-) \in \mathcal{M}$$

Folgerung: **(swDAE)** beobachtbar  $\Leftrightarrow \mathcal{M} = \{0\}$

# Beispiel erneut betrachtet



System 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$\sigma(\cdot) : 1 \rightarrow 2$  ergibt

$$\mathcal{E}_- = \text{span}\{e_1, e_3\},$$

$$\ker O_- = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

$$\ker O_+^- = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\},$$

$$\ker O_+^{\text{imp-}} = \text{span}\{e_2\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \{0\}$$

System 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$\sigma(\cdot) : 2 \rightarrow 1$  ergibt

$$\mathcal{E}_- = \text{span}\{e_2\},$$

$$\ker O_- = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

$$\ker O_+^- = \text{span}\{e_1, e_2\},$$

$$\ker O_+^{\text{imp-}} = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \text{span}\{e_2\}$$

# Inhalt



- 1 Einleitung
  - Systemklasse
  - Beispiel
- 2 Das Einmal-Schalten Ergebnis
- 3 Das Ergebnis erklärt
  - Der Unterraum  $\mathcal{E}_-$
  - Der Unterraum  $\ker O_-$
  - The space  $\ker O_-^+$
  - Der Unterraum  $\ker O_+^{\text{imp}-}$
- 4 Weiterführende Ergebnisse**
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Mehrere Schaltvorgänge
- 5 Zusammenfassung

# Vorwärtsbeobachtbarkeit

## Definition (Vorwärtsbeobachtbarkeit)

(swDAE) ist **vorwärts beobachtbar**  $:\Leftrightarrow \forall (u_1, x_1, y_1), (u_2, x_2, y_2) :$   
 $(u_1, y_1) = (u_2, y_2) \Rightarrow \exists T \geq 0 : x_1(T, \infty) = x_2(T, \infty)$

- im Allgemeinen schwächer als globale Beobachtbarkeit
- vermutlich nützlicher für Beobachterentwurf

## Theorem (Vorwärtsbeobachtbarkeit für einmaliges Schalten)

(swDAE) mit **einmaligem Schalten** ist *vorwärtsbeobachtbar genau dann, wenn*

$$\Pi_+(\mathcal{M}) = \{0\}.$$

Beispiel erneut betrachtet:

$\sigma(\cdot) : 2 \rightarrow 1$ , (swDAE) global unbeobachtbar

$\Pi_+(\mathcal{M}) = \{0\}$  also (swDAE) vorwärtsbeobachtbar

# Allgemeine Klasse von Schaltsignalen

Sei  $\mathcal{M}_k := \mathfrak{C}_k \cap \ker O_k \cap \ker O_{k+1}^- \cap \ker O_{k+1}^{\text{imp}-}$ ,

$$\mathcal{N}_m^m := \mathcal{M}_m$$

$$\mathcal{N}_{k-1}^m := \mathcal{M}_{k-1} \cap \Pi_k^{-1}(\exp(-A_k^{\text{diff}} \tau_k) \mathcal{N}_k^m); \quad 1 \leq k \leq m$$

**Vermutung: Globale Beobachtbarkeit**

**(swDAE)** ist global beobachtbar genau dann, wenn  $\exists m \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathcal{N}_0^m = \{0\}$$

Weiterhin, sei  $\mathcal{P}_k := \Pi_{k+1}(\mathcal{M}_k)$

$$\mathcal{Q}_0^0 = \mathcal{P}_0$$

$$\mathcal{Q}_0^k = \mathcal{P}_k \cap \Pi_{k+1}(\exp(A_{k+1} \tau_{k+1}) \mathcal{Q}_0^{k-1}), \quad k \geq 1$$

**Vermutung: Vorwärtsbeobachtbarkeit**

**(swDAE)** ist vorwärtsbeobachtbar genau dann, wenn  $\exists m \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathcal{Q}_0^m = \{0\}$$

# Zusammenfassung

- Wir betrachteten die Beobachtbarkeit von geschalteten DAEs

$$E_{\sigma} \dot{x} = A_{\sigma} x + B_{\sigma} u$$

$$y = C_{\sigma} x + D_{\sigma} u$$

- Vollständige Charakterisierung von Beobachtbarkeit im Einmal-Schalten-Fall, basierend auf Durchschnitt von vier Unterräumen:
  - Konsistenz:  $x(0-) \in \mathcal{C}_-$
  - Links-Unbeobachtbarkeit:  $y^{(i)}(0-) = 0 \Leftrightarrow x(0-) \in \ker O_-$
  - Rechts-Unbeobachtbarkeit:  $y^{(i)}(0+) = 0 \Leftrightarrow x(0-) \in \ker O_+^-$
  - Impuls-Unbeobachtbarkeit:  $y[0] = 0 \Leftrightarrow x(0-) \in \ker O_+^{\text{imp-}}$
- Verständnis des Einmal-Schalten-Fall fundamental für Ergebnisse für allgemeines Schalten



Aneel Tanwani und Stephan Trenn.

On observability of switched differential-algebraic equations.

In *Proc. 49th IEEE Conf. Decis. Control (CDC 2010), Atlanta, USA*, 5656–5661.