Stabilität von geschalteten DAEs

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Vortrag am Lehrgebiet Technomathematik
Technische Universität Kaiserslautern, 28.03.2011

Inhalt

Geschaltete DAEs

Geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation)

(swDAE) $\boxed{E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)}$ bzw. $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$
  - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
  - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \ldots, (E_\mathrm{p}, A_\mathrm{p})$
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = 1, \ldots, \mathrm{p}$
  - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \not\equiv 0$

Motivation und Fragestellung

Wieso geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

1. Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
2. DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$\begin{aligned} u(t) &= F_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{oder} \\ u(t) &= F_{\sigma(t)} x(t) + G_{\sigma(t)} \dot{x}(t) \end{aligned}$$

3. Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

$E_p \dot{x} = A_p x$ asymp. stabil $\forall p \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ asymp. stabil

Beispiel 1: Sprünge und Stabilität

Beispiel 1a:

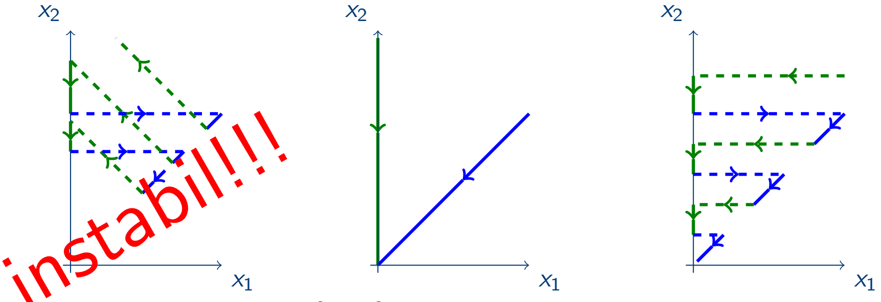
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Beispiel 1b:

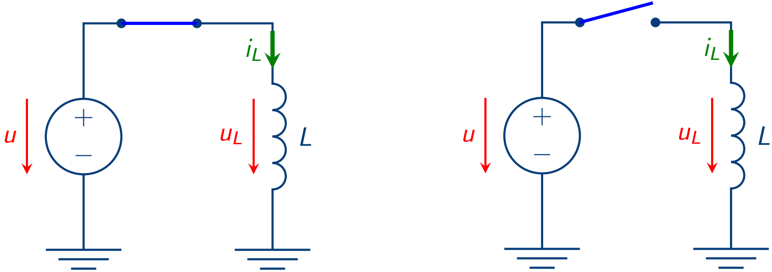
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Bemerkung: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ist Lyapunovfunktion für alle Teilsystem

Beispiel 2: Impulse in Lösung

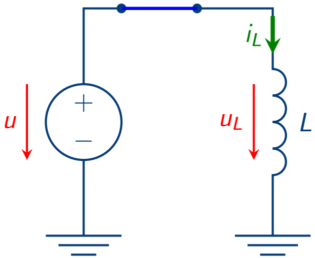


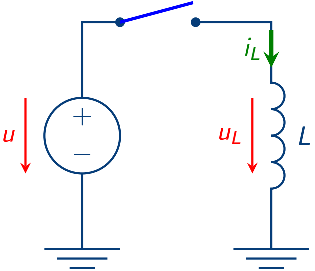
Konstanter Eingang: $\dot{u} = 0$

Induktiviätsgesetz: $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = u_L$

Schalterabhängig: $0 = u_L - u$ $\qquad$ $0 = i_L$

Beispiel 2: Impulse in Lösung





$x = [u, i_L, u_L]^\top$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$x = [u, i_L, u_L]^\top$

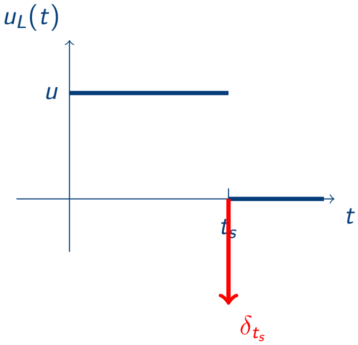
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

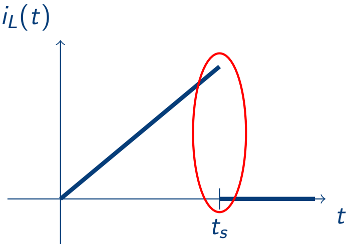
Lösung des Beispiels

$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = u_L, \quad 0 = u_L - u \quad$ oder $\quad 0 = i_L$

u konstant, $\quad i_L(0) = 0$

Schalten bei $t_s > 0$: $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t < t_s \\ 2, & t \geq t_s \end{cases}$





Beobachtungen

Lösungen

- Modi haben eingeschränkte Dynamik: Konsistenzräume
- Schalten $\Rightarrow$ inkonsistente Anfangswerte
- inkonsistente Anfangswerte $\Rightarrow$ Sprünge in x

Stabilität

- Gemeinsame Lyapunov-Funktion reicht nicht
- Stabilität hängt von Sprüngen ab

Impulse

- Schalten $\Rightarrow$ Dirac-Impulse in Lösung x
- Dirac-Impuls = unendlicher Peak $\Rightarrow$ Instabilität

Inhalt

Lösungen bei klassischen DAEs

Betrachte $E\dot{x} = Ax$.

Theorem (Weierstraß 1868)

(E,A) regulär $\Leftrightarrow$
$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar:*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

N nilpotent, $T = [V, W]$

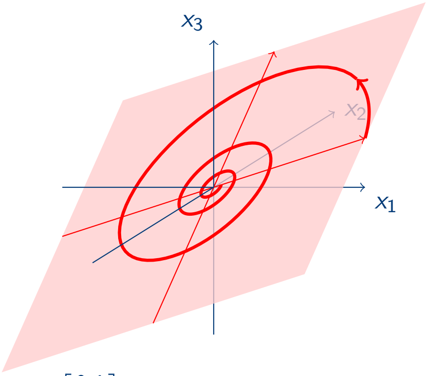
Folgerung (für reguläre (E,A))

x löst $E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow$

$$x(t) = Ve^{Jt}v_0$$

$V \in \mathbb{R}^{n\times n_1}$, $J \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$.
Konsistenzraum: $\mathfrak{C}_{(E,A)} := \operatorname{im} V$

$$(E,A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

Konsistenzprojektoren

Beobachtung

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Konsistente Anfangswerte: $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beliebiger Anfangswert $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \overset{\Pi}{\mapsto} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konsistenter Anfangswert

Definition (Konsistenzprojektoren für reguläre (E, A))

Seien $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $(SET, SAT) = \left(\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right] \right)$:

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Bemerkung: $\Pi_{(E,A)}$ lässt sich einfach und direkt aus (E, A) berechnen

Lyapunov-Funktionen für reguläre (E, A)

Definition (Lyapunov-Funktion für $E\dot{x} = Ax$)

$Q = \overline{Q}^\top > 0$ auf $\mathfrak{C}_{(E,A)}$ und $P = \overline{P}^\top > 0$ löse

$$A^\top PE + E^\top PA = -Q \quad \text{(verallgemeinerte Lyapunovgleichung)}$$

Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto (Ex)^\top PEx$

V monoton fallend entlang Lösungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) &= (Ex(t))^\top PE\dot{x}(t) + (E\dot{x}(t))^\top PEx \\ &= x(t)^\top E^\top PAx(t) + x(t)^\top A^\top PEx(t) \\ &= -x(t)^\top Qx(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Theorem (Owens & Debeljkovic 1985)

$E\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil $\quad\Leftrightarrow\quad \exists$ Lyapunov-Funktion

Inhalt

Distributiontheorie - Grundsätzliches

Distributionen - Überblick

- Verallgemeinerte Funktionen
- Beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ_0 ist "Ableitung" der Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Zwei verschiedene formale Ansätze

1. Funktionalanalytisch: Dualraum des Raumes der Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
2. Axiomatisch: Raum aller "Ableitungen" stetiger Funktionen (J. Sebastião e Silva 1954)

Distributionen - formal

Definition (Testfunktionen)

$\mathcal{C}_0^\infty := \{\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi$ ist glatt mit kompakten Träger $\}$

Definition (Distributionen)

$\mathbb{D} := \{\ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R} \mid D$ ist linear und stetig $\}$

Definition (Reguläre Distributionen)

$f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$: $\quad f_\mathbb{D} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \int_\mathbb{R} f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{D}$

Definition (Ableitung)

$D'(\varphi) := -D(\varphi')$

Dirac-Impuls bei $t_0 \in \mathbb{R}$

$\delta_{t_0} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$

Multiplikation mit Funktionen

Definition (Multiplikation mit glatten Funktionen)

$\alpha \in \mathcal{C}^\infty: \quad (\alpha D)(\varphi) := D(\alpha\varphi)$

(swDAE) $\quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

Koeffizienten nicht glatt

Problem: $E_\sigma, A_\sigma \notin \mathcal{C}^\infty$

Beobachtung:

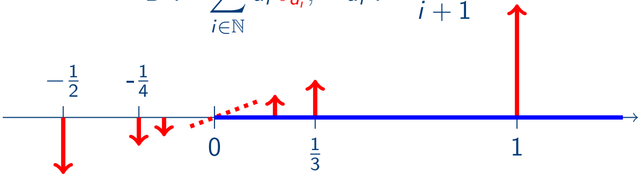
$$\begin{array}{c} E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \\ i \in \mathbb{Z}: \ \sigma_{[t_i, t_{i+1})} \equiv p_i \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z}: \ (E_{p_i}\dot{x})_{[t_i,t_{i+1})} = (A_{p_i}x)_{[t_i,t_{i+1})}$$

Neue Frage: Einschränkung von Distributionen auf Intervalle

Eine nicht einschränkbare Distribution

Betrachte folgende (wohldefinierte!) Distribution:

$$D := \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i\, \delta_{d_i}, \qquad d_i := \frac{(-1)^i}{i+1}$$



Einschränkung sollte ergeben

$$D_{(0,\infty)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_{2k}\, \delta_{d_{2k}}$$

Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $\varphi_{[0,1]} \equiv 1$:

$$D_{(0,\infty)}(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_{2k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2k+1} = \infty$$

Dilemma

Geschaltete DAEs

- Beispiele: Distributionelle Lösungen
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten
- Oder: Einschränkung auf Intervalle

Distributionen

- Distributionelle Einschränkung unmöglich
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten unmöglich
- *Anfangswertprobleme können nicht formuliert werden*

Zugrundeliegendes Problem

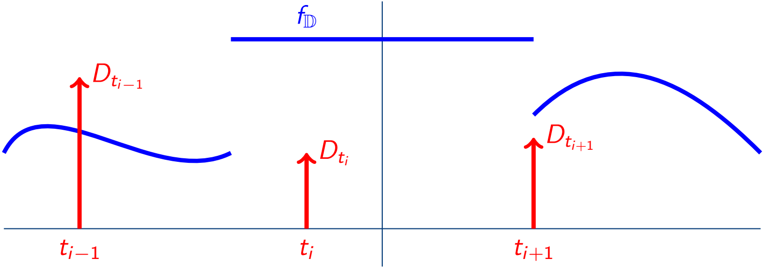
Raum der Distributionen zu groß.

Stückweise glatte Distributionen

Definiere einen passenden, kleineren Raum:

Definition (Stückweise glatte Distributionen $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

$$\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} := \left\{ f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}, \\ T \subseteq \mathbb{R} \text{ lokal endlich}, \\ \forall t \in T : D_t = \sum_{i=0}^{n_t} a_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right\}$$



Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

- $\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}$ "$\subseteq$" $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- $D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- Einschränkung $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} \to \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$, $D \mapsto D_M$ für alle Intervalle $M \subseteq \mathbb{R}$ wohldefiniert
- Multiplikation mit $\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}$-Funktionen wohldefiniert
- links- und rechtsseitige Auswertung bei $t \in \mathbb{R}$: $D(t-), D(t+)$
- Impuls bei $t \in \mathbb{R}$: $D[t]$

(swDAE) $\quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

Anwendung auf (swDAE)

x löst **(swDAE)** $\quad :\Leftrightarrow \quad x \in (\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$ und **(swDAE)** gilt in $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Zwischenstand: Probleme und Lösungen

(swDAE) $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

1. Stabilitätskriterium für einzelne DAEs $E_p \dot{x} = A_p x$
   $\Rightarrow$ Lyapunov-Funktionen
2. **Keine klassischen Lösungen**
   $\Rightarrow$ Erlaube Sprünge in Lösungen
3. Wie „springt“ inkonsistenter Anfangswert auf konsistenten?
   $\Rightarrow$ Konsistenzprojektoren $\Pi_{(E_1,A_1)}, \ldots, \Pi_{(E_N,A_N)}$
4. Differentiation von Sprüngen
   $\Rightarrow$ Raum der Distributionen als Lösungsraum
5. **Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten**
   $\Rightarrow$ Raum der stückweise glatten Distributionen
   $\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
   $\Rightarrow$ Deutlich größere Systemklasse kann betrachtet werden

Inhalt

Asymptotische Stabilität und impulsfreie Lösungen

Definition (Asymptotische Stabilität einer geschalteten DAE)

(swDAE) asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$ x ist impulsfrei und $x \to 0$ für $t \to \infty$

Im folgenden $\Pi_p := \Pi_{(E_p,A_p)}$ Konsistenzprojektor zu (E_p, A_p)

Impulsfreiheitsbedingung

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0$

Theorem (T. 2009)

(IFB) $\Leftrightarrow$ *Alle Lösungen von* $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ *sind impulsfrei* $\forall \sigma$

Stabilität unter beliebigem Schalten

Betrachte **(swDAE)** mit zusätzlicher Annahme:

($\exists$V$_\mathbf{p}$): $\forall p \in \{1,\ldots,N\}$ $\exists$ Lyapunov-Funktion V_p für (E_p, A_p)

d.h. jede DAE $E_p\dot{x} = A_p x$ ist asymp. stabil

Lyapunov-Sprung-Bedingung

(LSB): $\forall p,q = 1,\ldots,N$ $\forall x \in \mathfrak{C}_{(E_q,A_q)}$: $\quad V_p(\Pi_p x) \leq V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

(IFB) $\wedge$ **($\exists$V$_\mathbf{p}$)** $\wedge$ **(LSB)** $\Rightarrow$ **(swDAE)** *asymtotisch stabil*

Beispiele 1a und 1b erfüllen **(IFB)** und **($\exists$V$_\mathbf{p}$)**, aber nur 1b erfüllt **(LSB)**

Beispiel 1 Erinnerung

Beispiel 1a:

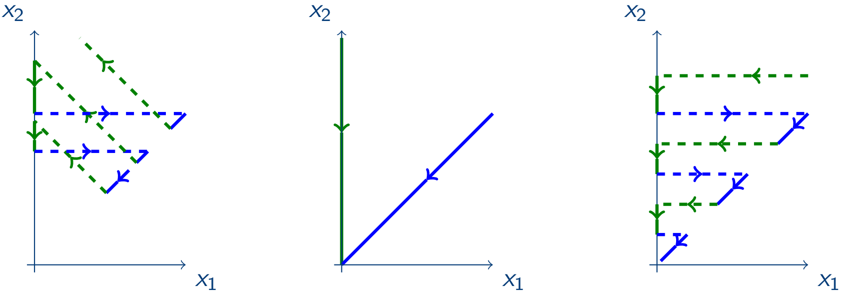
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Beispiel 1b:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Langsames Schalten

Betrachte die Menge der langsamen Schaltsignale, $\tau > 0$:

$$\Sigma^\tau := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \text{ Schaltzeiten} \\ t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : \\ t_{i+1} - t_i \geq \tau \end{array} \right\}.$$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\exists \tau > 0 \ \forall \sigma \in \Sigma^\tau$: **(IFB)** $\wedge$ **($\exists \mathbf{V_p}$)** $\Rightarrow$ **(swDAE)** *asymptotisch stabil*

Nochmal zur Erinnerung:
(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_{(E_p,A_p)})\Pi_{(E_q,A_q)} = 0$

Wie gesagt, Beispiel 1a und 1b erfüllen beide **(IFB)** und **($\exists \mathbf{V_p}$)**
$\Rightarrow$ Beide Beispiele asymptotisch stabil unter langsamen Schalten

Inhalt

Kommutativität und Stabilität bei geschalteten ODEs

Theorem (Narendra und Balakrishnan 1994)

Betrachte geschalte ODE

(swODE) $\dot{x} = A_\sigma x$

mit A_p Hurwitz, $p \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\}$ und kommutierenden A_p, d.h.

$$[A_p, A_q] := A_p A_q - A_q A_p = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\} \tag{K}$$

$\Rightarrow$ **(swODE)** *asymptotisch stabil* $\forall \sigma$.

Beweisidee: Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}(t-t_k)} e^{A_{p_{k-1}}(t_k - t_{k-1})} \ldots e^{A_{p_1}(t_2-t_1)} e^{A_{p_0}(t_1-t_0)} x_0 \\ &\overset{(K)}{=} e^{A_1 \Delta t_1} e^{A_2 \Delta t_2} \ldots e^{A_{\mathrm{p}} \Delta t_{\mathrm{p}}} x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \to \infty$ für mindestens ein p und $t \to \infty$.

Verallgemeinerung auf **(swDAE)**

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Verallgemeinerung - Fragen

- Welche Matrizen müssen kommutieren?
- Was passiert mit den Sprüngen?

Beispiel 1a: $(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$, $\quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$[A_1, A_2] = 0$, aber instabiles Verhalten möglich

Die Matrix A^{diff}

Sei (E, A) regulär mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$, N nilpotent

Erinnerung Konsistenzprojektor: $\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$

Definition (Differential-„Projektor")

$$\Pi^{\text{diff}}_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$$

Satz (Dynamik der DAE)

x *löst* $E\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \Pi^{\text{diff}}_{(E,A)} Ax$

$$A^{\text{diff}} := \Pi^{\text{diff}}_{(E,A)} A = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Kommutativitätsbedingung

Betrachte wieder geschaltete DAE:

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Theorem (Liberzon, T., Wirth 2011)

(IFB) $\wedge$ **($\exists$V$_\mathbf{p}$)** $\wedge$

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\} \qquad \text{((K))}$$

$\Rightarrow$ **(swDAE)** *ist asymptotisch stabil* $\forall \sigma$ *und* $\exists$ *gemeinsame Lyapunovfunktion mit*

$$V(\Pi_p x) \leq V(x) \quad \forall x \; \forall p$$

Interessant: Keine zusätzliche Bedingung an Sprünge!

Beweisskizze

Beweisidee: Aus

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\} \tag{K}$$

folgt auch

$$[\Pi_p, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \wedge \quad [\Pi_p, \Pi_q] = 0 \quad \wedge \quad [A_p^{\text{diff}}, \Pi_q] = 0.$$

Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}^{\text{diff}}(t-t_k)} \Pi_{p_k} e^{A_{p_{k-1}}^{\text{diff}}(t_k-t_{k-1})} \Pi_{p_{k-1}} \cdots e^{A_{p_1}^{\text{diff}}(t_2-t_1)} \Pi_{p_1} e^{A_{p_0}^{\text{diff}}(t_1-t_0)} \Pi_{p_0} x_0 \\ &\overset{(K)}{=} e^{A_1^{\text{diff}} \Delta t_1} \Pi_1 \; e^{A_2^{\text{diff}} \Delta t_2} \Pi_2 \cdots e^{A_{\mathrm{p}}^{\text{diff}} \Delta t_{\mathrm{p}}} \Pi_{\mathrm{p}} x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \to \infty$ für mindestens ein p und $t \to \infty$.

Konstruktion Lyapunovfunktion

$[A_1^{\text{diff}}, A_2^{\text{diff}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists T$ invertierbar:

$$T A_1^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T A_2^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A_{ij} Hurwitz und $[A_{11}, A_{21}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists P_1,\ P_2,\ P_3$ s.p.d.:

$$\begin{gathered} A_{11}^\top P_1 + P_1 A_{11} < 0 \quad \wedge \quad A_{21}^\top P_1 + P_1 A_{21} < 0 \\ A_{12}^\top P_2 + P_2 A_{12} < 0 \\ A_{33}^\top P_3 + P_3 A_{22} < 0 \end{gathered}$$

$\Rightarrow$

$$P = T^{-\top} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} T^{-1}$$

liefert gesuchte Lyapunovfunktion $V(x) = x^\top P x$.

Zusammenfassung

Wir betrachteten geschaltete DAEs

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

- Lösungstheorie
  - Keine klassischen Lösungen: Sprünge und Impulse
  - Impulsfreiheitsbedingung
  - Sprünge weiterhin erlaubt
- Hinreichende Stabilitätsbedingung
  - Multiple Lyapunovfunktionen mit Sprungbedingung
  - Langsames Schalten
  - Kommutativität (insb. Lyapunovfunktionskonstruktion)
- In Arbeit: Allgemeine inverse Lyapunov-Resultate

S. Trenn: Distributional differential algebraic equations.
Dissertation, Universitätsverlag Ilmenau, Ilmenau, Aug. 2009.

D. Liberzon und S. Trenn: On stability of linear switched differential algebraic equations.
In Proc. IEEE 48th Conf. on Decision and Control, Shanghai, Seiten 2156–2161, Dez. 2009.

D. Liberzon, S. Trenn und F. Wirth: Commutativity and asymptotic stability for linear switched DAEs.
Zur Veröffentlichung eingereicht.