Der Bang-Bang Funnel Controller

Stephan Trenn (gemeinsam mit Daniel Liberzon)

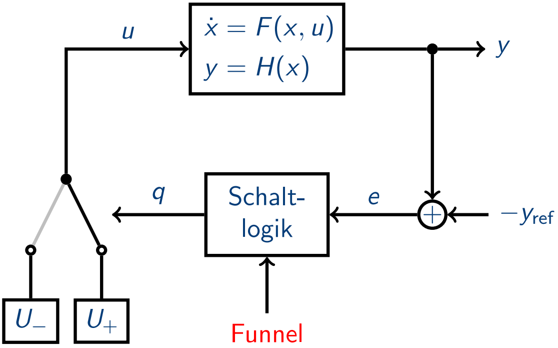
Institut für Mathematik, Universität Würzburg

Treffen des GAMM Fachausschusses „Dynamik und Regelungstheorie“
14. Oktober 2011, Universität Bayreuth

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Inhalt

Systemstruktur



Referenzsignal $y_{\text{ref}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt

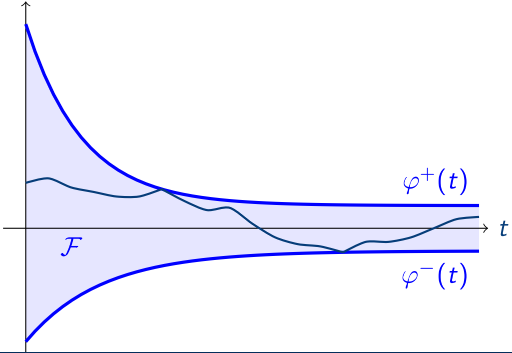
Der Funnel

Ziel der Regelung

Fehler $e := y - y_{\text{ref}}$ verbleibt im *Funnel*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi^-, \varphi^+) := \{\ (t, e)\ \big|\ \varphi^-(t) \le e \le \varphi^+(t)\ \}$$

wobei $\varphi_\pm : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt



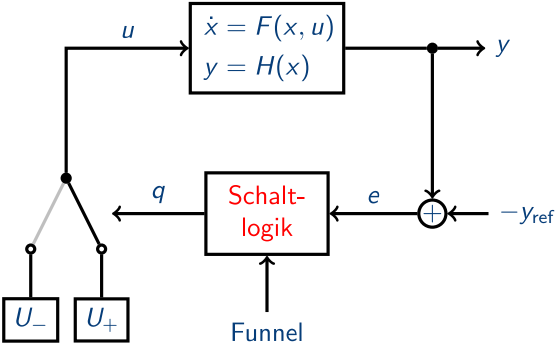
- zeitvariante strikte Fehlerschranke
- transientes Verhalten
- praktische Folgeregelung ($|e(t)| < \lambda$ for $t >> 0$)

Der Bang-Bang Funnel Controller

Kontinuierlicher Funnel Controller: Eingeführt von Ilchmann et al. in 2002

Neuer Ansatz

Erreiche Regelziel mit Bang-Bang Regelung, d.h. $u(t) \in \{U_-, U_+\}$



Inhalt

Relativgrad Eins

Definition (Relativgrad Eins)

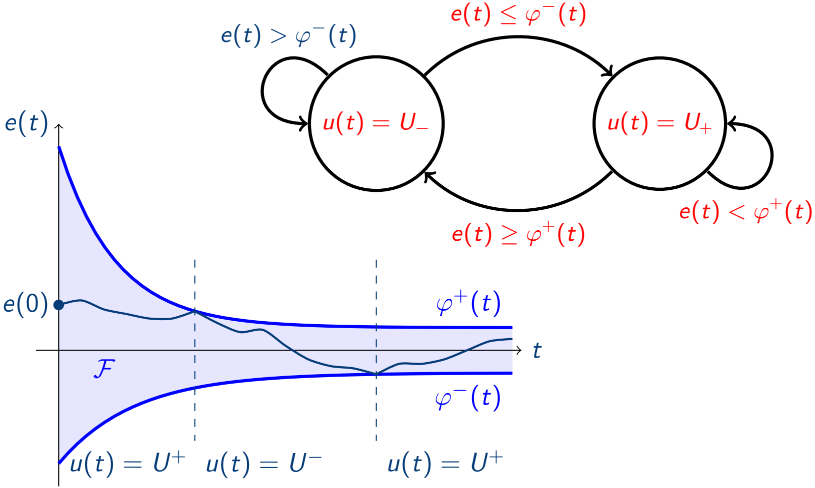
$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \qquad \cong \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= f(y,z) + \overbrace{g(y,z)}^{>0}\, u \\ \dot{z} &= h(y,z) \end{aligned}$$

- Strukturelle Annahme
- f, g, h müssen nicht bekannt sein
- zum Prüfen der Machbarkeit braucht man Schranken an f, g, h

Essentielle Eigenschaft der Systemklasse

$$\begin{aligned} u(t) << 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{y}(t) << 0 \\ u(t) >> 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{y}(t) >> 0 \end{aligned}$$

Schaltlogik



Relativegrad Eins Resultat

Theorem (Bang-Bang Funnel Controller)

Relativgrad Eins & Funnel & Schaltlogik & Machbarkeitsbedingungen
$\Rightarrow$
Bang-Bang Funnel Controller funktioniert:

- *Existenz und Eindeutigkeit von globaler Lösung*
- *Fehler verbleibt immer im Funnel*
- *kein Zeno-Verhalten*

Notwendiges Wissen:

- für Reglerimplentierung
  - Relativgrad (Eins)
  - Signale: Fehler $e(t)$ und Funnelgrenzen $\varphi^{\pm}(t)$
- um Machbarkeitsbedingungen zu prüfen:
  - Schranken für die Nulldynamik
  - Schranken für f und g
  - Schranken für y_{ref} und $\dot{y}_{\text{ref}}$
  - Schranken für die Funnelgrenzen

Inhalt

Relativgrad r

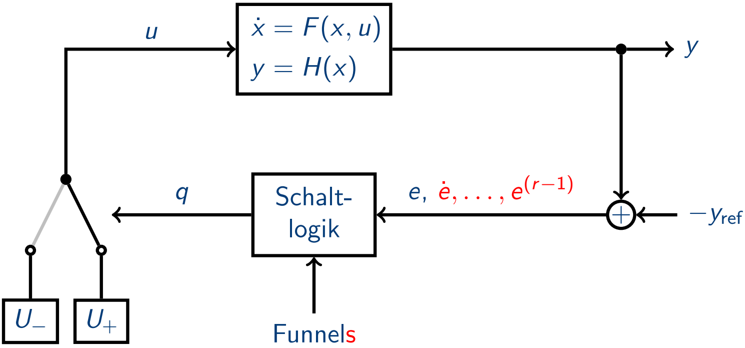
Definition (Relativgrad r)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x)\end{aligned} \quad \cong \quad \begin{aligned} y^{(r)} &= f(y,\dot{y},\dots,y^{(r-1)},z) + \overbrace{g(y,\dot{y},\dots,y^{(r-1)},z)}^{>0}\,u \\ \dot{z} &= h(y,\dot{y},\dots,y^{(r-1)},z)\end{aligned}$$

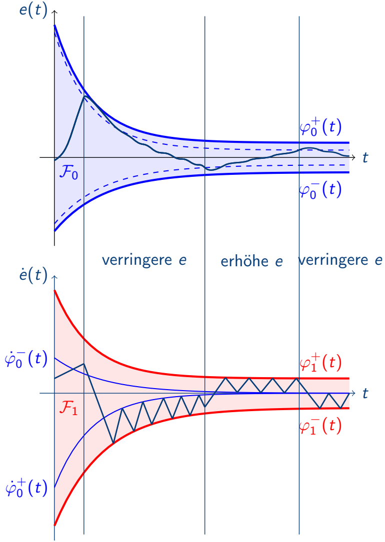
Wesentliche Eigenschaft

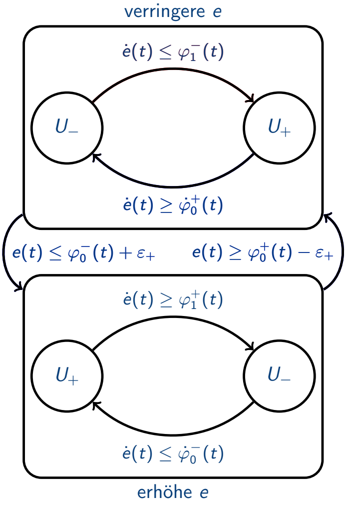
$$u(t) << 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(r)}(t) << 0$$
$$u(t) >> 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(r)}(t) >> 0$$

Systemstruktur

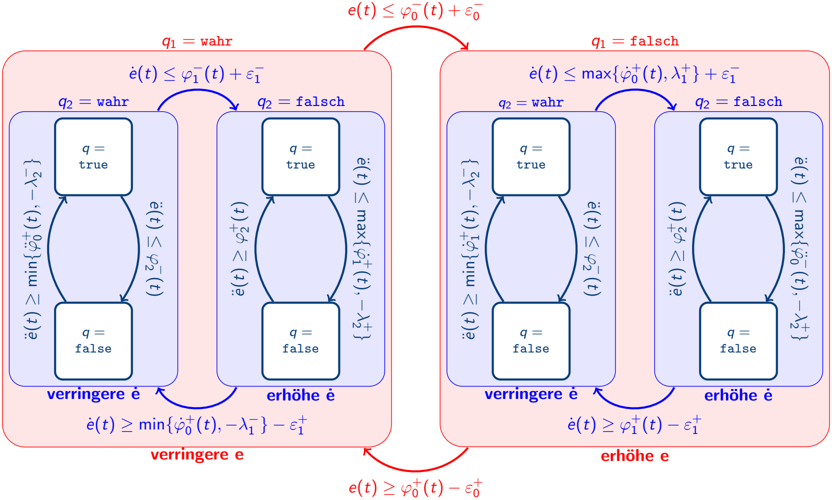


Die Schaltlogik (Relativgrad Zwei)

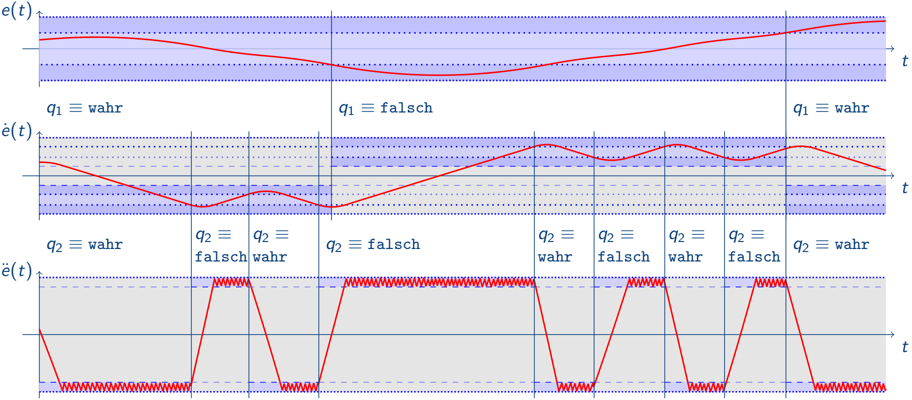




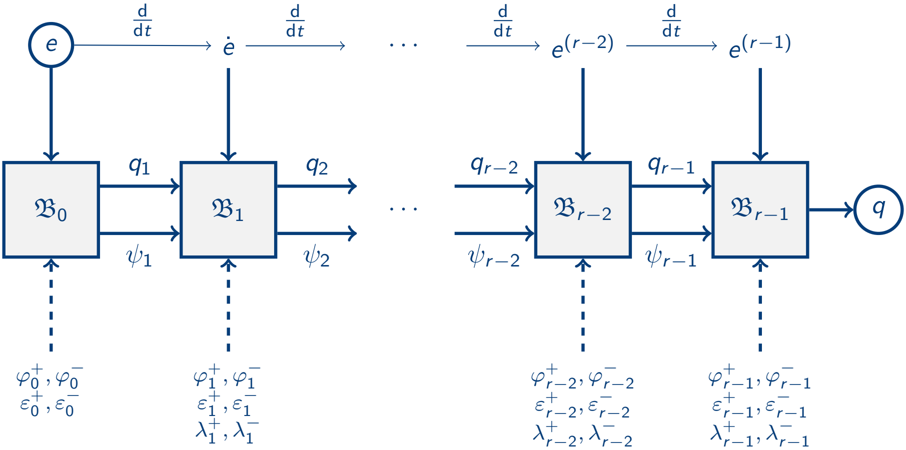
Relativgrad Drei Schaltlogik



Schematisches Lösungsverhalten Relativgrad Drei



Struktur der Schaltlogik



Definition der Blöcke $\mathfrak{B}_i$

Mithilfe des elementaren Schaltprädikats

$$\mathfrak{S}\,(e,\overline{e},\underline{e},q_{\text{old}}) := [e \geq \overline{e} \ \vee \ (e > \underline{e} \ \wedge \ q_{\text{old}})] \in \{\texttt{wahr},\texttt{falsch}\}$$

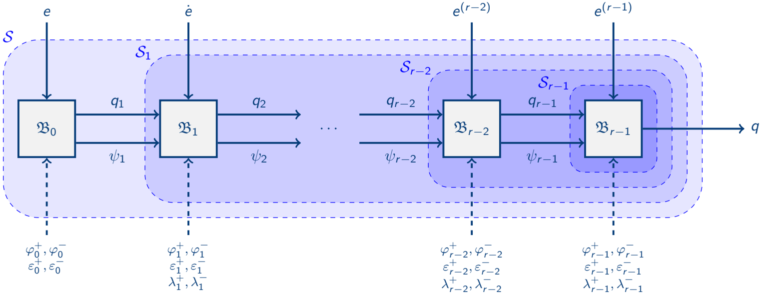
definiere

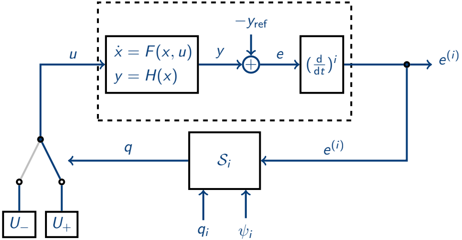
$$\mathfrak{B}_i : (e^{(i)}, q_i, \psi_i) \mapsto (q_{i+1}, \psi_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, r-2, \quad \text{mit}$$

$$q_{i+1}(t) = \begin{cases} \mathfrak{S}\left(e^{(i)}(t), \min\{\psi_i(t), -\lambda_i^-\} - \varepsilon_i^+, \varphi_i^-(t) + \varepsilon_i^-, q_{i+1}(t-)\right), & q_i(t) = \texttt{wahr} \\ \mathfrak{S}\left(e^{(i)}(t), \varphi_i^+(t) - \varepsilon_i^+, \max\{\psi_i(t), \lambda_i^+\} + \varepsilon_i^-, q_{i+1}(t-)\right), & q_i(t) = \texttt{falsch} \end{cases}$$

$$\psi_{i+1}(t) = \begin{cases} \dot\psi_i(t+), & q_i(t) = \texttt{wahr} \ \wedge \ q_{i+1}(t) = \texttt{wahr} \\ \dot\varphi_i^-(t), & q_i(t) = \texttt{wahr} \ \wedge \ q_{i+1}(t) = \texttt{falsch} \\ \dot\varphi_i^+(t), & q_i(t) = \texttt{falsch} \ \wedge \ q_{i+1}(t) = \texttt{wahr} \\ \dot\psi_i(t+), & q_i(t) = \texttt{falsch} \ \wedge \ q_{i+1}(t) = \texttt{falsch} \end{cases}$$

Zugrunde liegende Idee





Resultat für höheren Relativgrad

Gegeben:

- Funnelgrenzen φ_0^+ und φ_0^- für Fehler e mit
  - hinreichend glatt, r mal differenzierbar (fast überall)
  - beschränkt mit beschränkten Ableitungen
  - $\liminf_{t\geq 0} \varphi_0^+(t) - \varphi_0^-(t) > 0$
- Schranken für nichtlineare Systemdynamik

Dann:

- man findet „passende“
  - Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ für $e^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$
  - Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$, $i = 0, 1, \ldots, r-2$
  - gewünschte Anstiege $\lambda_i^\pm$, $i = 1, 2, \ldots, r$
- so dass für genügend großes bzw. kleines U^+ und U^- der Bang-Bang Funnel Controller funktioniert, d.h.
  - Existenz und Eindeutigkeit von globalen Lösungen des hybriden Systems
  - Fehler und dessen Ableitungen verbleiben in entsprechenden Funnels
  - kein Zeno-Verhalten