

Der Funnel-Regler: 10 Jahre Adaption

Stephan Trenn

AG Technomathematik, Technische Universität Kaiserslautern

Kolloquiumsvortrag am Lehrstuhl für Automatisierungstechnik und
Prozessinformatik, Ruhr-Universität Bochum, 27.11.2012



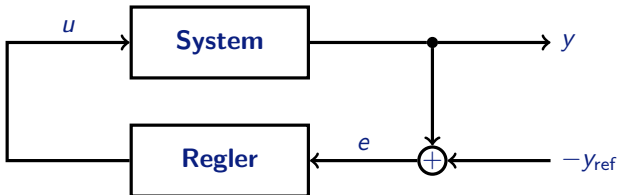
Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers



Regelungstechnische Fragestellung

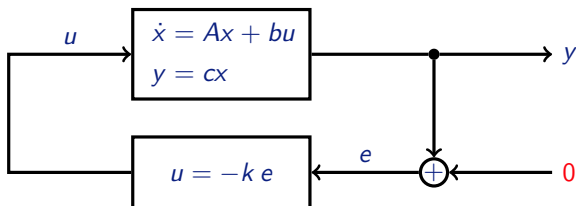


Ziel: **Trajektorienfolgeregelung**

ohne

- genaue Kenntnis eines Systemmodells
- Kenntnis des Referenzsignals (nur Fehler e ist dem Regler bekannt)
- asymptotische Konvergenz (aber beliebig kleiner Fehler)

High-gain-Regelung: linearer Fall



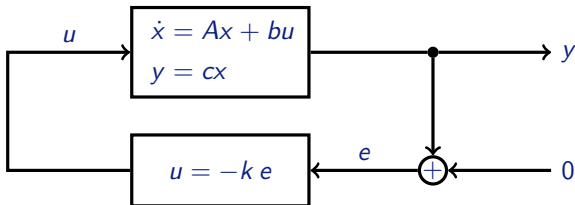
Annahmen:

- **Relativgrad $r = 1$** $\Leftrightarrow \gamma := cb \neq 0$, insbesondere:

$$\text{System} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{y} &= a_{11}y + a_{12}z + \gamma u \\ \dot{z} &= a_{21}y + A_{22}z \end{aligned}$$

- **Positive Hochfrequenzverstärkung** $\Leftrightarrow \gamma > 0$
- **Stabile Nulldynamik** $\Leftrightarrow A_{22}$ Hurwitz

High-gain-Regelung: linearer Fall



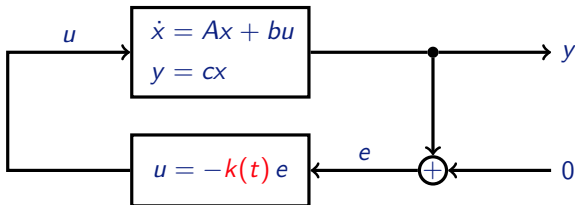
Theorem (High-gain Regelung)

$cb > 0$ und stabile Nulldynamik $\Rightarrow \exists k_0 > 0$:

$\forall k \geq k_0$: Geschlossener Kreis ist *asymptotisch stabil*

Problem: Wie findet man k_0 ?

High-gain-Regelung: linearer Fall



Idee: Mache Verstärkung k zeitvariant

Theorem (Adaptiver High-Gain Regler)

$cb > 0$ und stabile Nulldynamik \Rightarrow

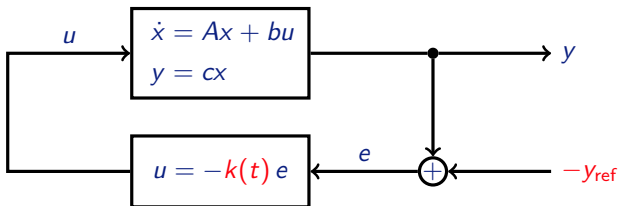
$\dot{k}(t) = e(t)^2$ macht geschlossenen Kreis *asymptotisch stabil*

und $k(\cdot)$ bleibt *beschränkt*

Problem: Störungen ($y_{\text{ref}} \neq 0$) führen zu **unbeschränkten** $k(\cdot)$!



High-gain-Regelung: linearer Fall



Lösung: Fordere nur noch **praktische Stabilität**, d.h. $|e(t)| \leq \lambda$ für $t \gg 0$

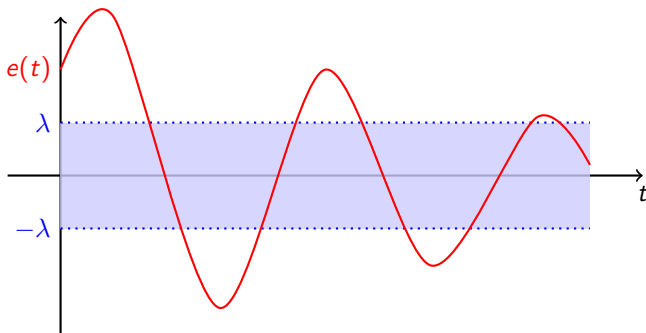
Theorem (λ -tracking)

Sei $cb > 0$, stabile Nulldynamik und $y_{\text{ref}}, \dot{y}_{\text{ref}}$ **beschränkt**. Für $\lambda > 0$ betrachte

$$\dot{k}(t) = \begin{cases} e(t)(e(t) - \lambda), & |e(t)| > \lambda, \\ 0, & |e(t)| \leq \lambda. \end{cases}$$

Dann ist geschlossener Kreis **praktisch stabil**.

Verbleibende Probleme vom λ -tracker



Probleme:

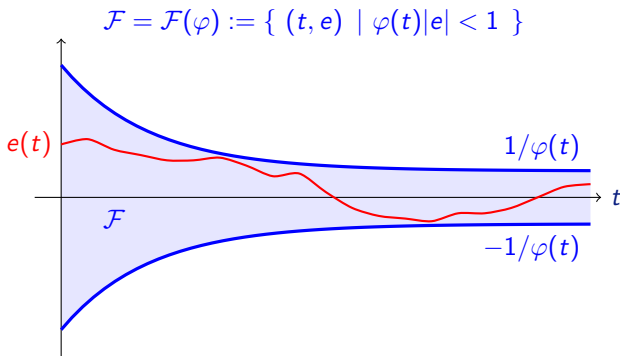
- Keine Garantien **wann** $|e(t)| \leq \lambda$
- Keine Beschränkung der **initialen Ausschläge**
- Monoton **wachsendes** $k(\cdot) \Rightarrow$ Messfehler werden unnötig verstärkt

Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers

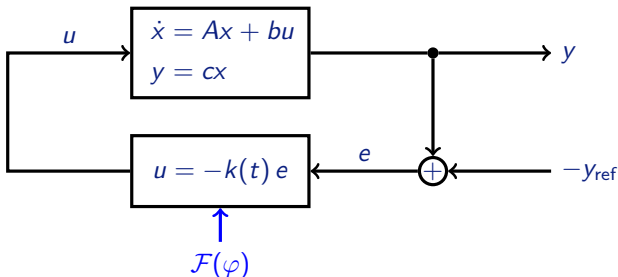
Der Funnel als zeitvariante Fehlerschranke



Idee: $k(t)$ **groß** \Leftrightarrow Abstand von $e(t)$ zum Funnelrand **klein**

$$k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|}$$

Der lineare SISO Fall



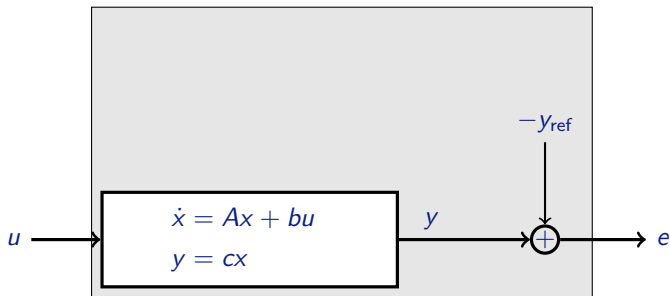
Theorem (Funnel Regler, Ilchman, Ryan, Sangwin 2002)

Sei $cb > 0$, A_{22} Hurwitz, $y_{ref}, \dot{y}_{ref}, \varphi, \dot{\varphi}$ beschränkt, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) > 0$ und $e(0)\varphi(0) < 1$. Dann ist

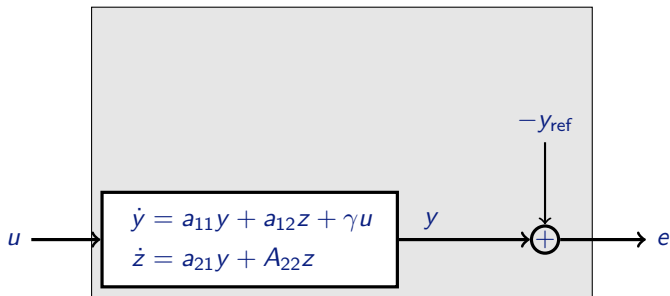
$$k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|}$$

im geschlossenen Kreis beschränkt, d.h. $e(t)$ verbleibt im Funnel.

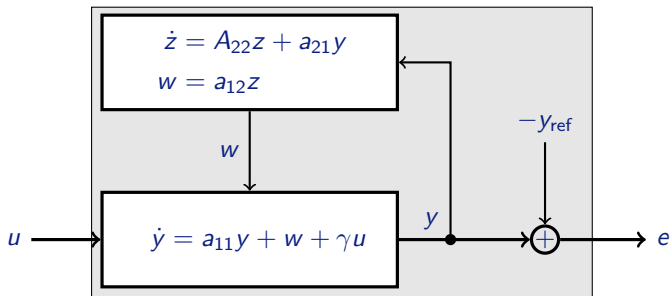
Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



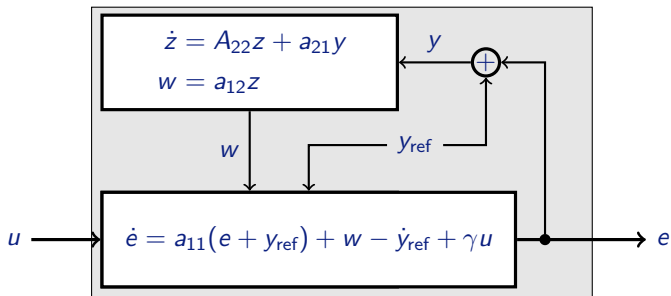
Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



Beweisidee: Neuinterpretation des Systems

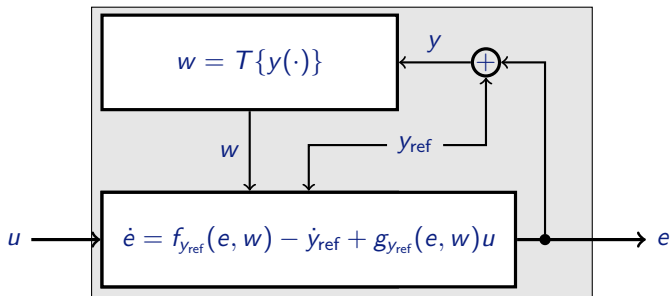


Beweisidee: Neuinterpretation des Systems





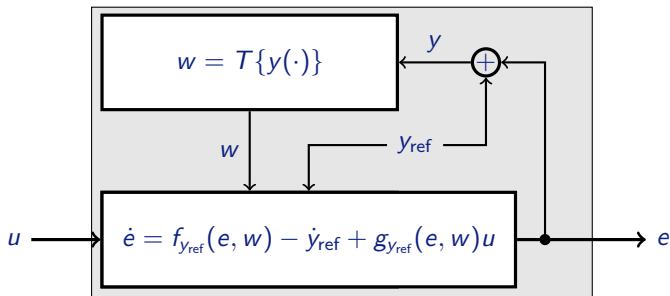
Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



Voraussetzungen:

- T ist **kausaler BIBO-Operator**, d.h. $\exists \kappa(\cdot) : \|w\| \leq \kappa(\|y\|)$
- $f_{y_{\text{ref}}}$ und $g_{y_{\text{ref}}}$ stetig und $g_{y_{\text{ref}}} > 0$
- y_{ref} und \dot{y}_{ref} **beschränkt**

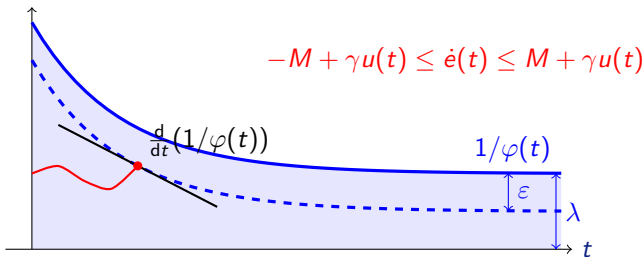
Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



Beweisidee: Betrachte maximale Lösung $e : [0, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, zu zeigen $\omega = \infty$.

- $e(t)$ im Funnel $\Rightarrow e$ beschränkt $\Rightarrow y$ beschränkt $\Rightarrow w$ beschränkt
- $\Rightarrow f_{y_{ref}}(e, w)$ beschränkt, $g_{y_{ref}}(e, w)$ von Null weg beschränkt
- $\Rightarrow -M + \gamma u(t) \leq \dot{e}(t) \leq M + \gamma u(t)$
- Also $u(t) \gg 0 \Rightarrow \dot{e}(t) \gg 0$ und $u(t) \ll 0 \Rightarrow \dot{e}(t) \ll 0$

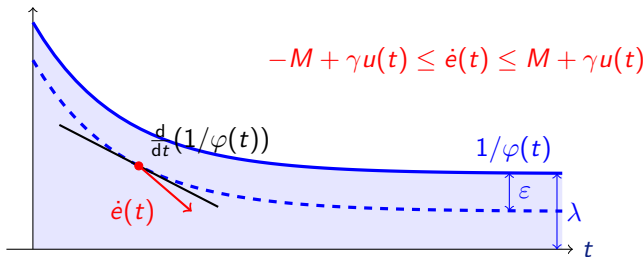
Beweisidee: Funnel invariant



Annahmen: $\varepsilon < \lambda/2$, $\varphi(t) \geq \Phi$, $\frac{d}{dt}(1/\varphi(t)) \geq -\Psi$

- $e(t) = \frac{1}{\varphi(t)} - \varepsilon \Rightarrow k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\Phi}{\varepsilon}$
- $\Rightarrow u(t) = -k(t)e(t) \leq -\frac{\Phi\lambda}{2\varepsilon}$
- $\Rightarrow \dot{e}(t) \leq M + \gamma u(t) \leq M - \frac{\gamma\Phi\lambda}{2\varepsilon}$
- Somit folgt aus $\varepsilon \leq \frac{\gamma\Phi\lambda}{2(\Psi + M)}$ dass $\dot{e}(t) \leq -\Psi \leq \frac{d}{dt}(1/\varphi(t))$

Beweisidee: Funnel invariant



Konsequenz: Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist

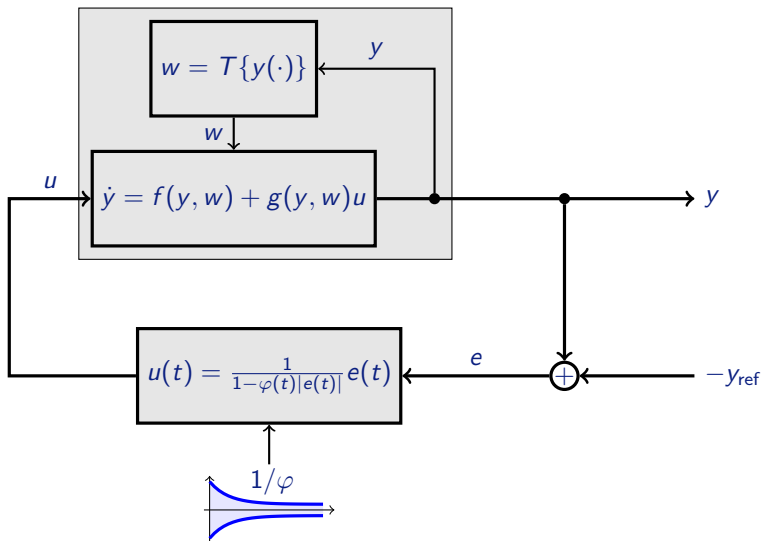
$$\mathcal{F}_\varepsilon := \{ (t, e) \mid |e(t)| < 1/\varphi(t) - \varepsilon \}$$

vorwärts invariant, also

$$(0, e(0)) \in \mathcal{F}_\varepsilon \Rightarrow (t, e(t)) \in \mathcal{F}_\varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

und **endliche Entweichzeit ist ausgeschlossen!**

Zusammenfassung ursprünglicher Funnel Regler



Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers

Eingangsbeschränkungen



u physikalisch beschränkt: $u(t) \in [-U, U]$ für $U > 0$

Beweisanalyse ergibt

$$U \geq \frac{\Psi + M}{\gamma} \Rightarrow \text{Funnell Regler funktioniert}$$

wobei

- $\frac{d}{dt}(1/\varphi(t)) \geq -\Psi$
- $|f(y, w) - \dot{y}_{\text{ref}}| \leq M$
- $g(y, w) \geq \gamma > 0$

Erinnerung

y_{ref} beschränkt \wedge e im Funnell $\Rightarrow y$ beschränkt $\Rightarrow w$ beschränkt

siehe auch: Ilchmann, Trenn 2004; Hopfe, Ilchmann, Ryan 2010

MIMO



Systemklasse

m -Eingang und m -Ausgangs-System:

$$\dot{y} = f(y, w, u), \quad w = T\{y\}$$

mit T ein kausaler BIBO-Operator und

$$\frac{\langle u, f(y, w, u) \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Theorem (Ilchmann, Ryan, Sangwin 2002)

Funnel Regler

$$u(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)\|e(t)\|} e(t)$$

funktioniert, d.h. $\|e(t)\| < 1/\varphi(t)$.

Beweisidee: Statt \dot{e} betrachte $\frac{d}{dt}(\|e(t)\|^2)$

Höherer Relativgrad



Systemklasse

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1(w, y)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + f_2(w, y)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_\rho = h(x_1, x_2, \dots, x_\rho) + f_\rho(w, y) + \gamma u$$

$$w = T\{y\}$$

$$y = x_1$$

Theorem (Ilchmann, Ryan, Townsend 2006, 2007)

Funnell Regelung

$$u(t) = -\gamma_\rho(k(t), e(t), \xi(t)), \quad k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)^2 \|e(t)\|^2}$$

mit geeigneten (*Backstepping*) $\gamma_\rho(\cdot)$ und $\xi(\cdot)$ funktioniert.



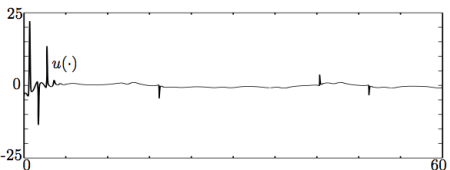
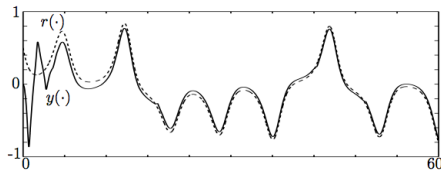
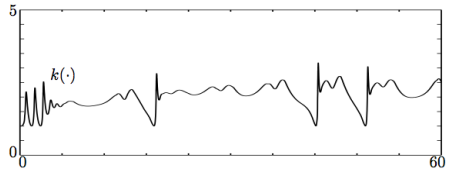
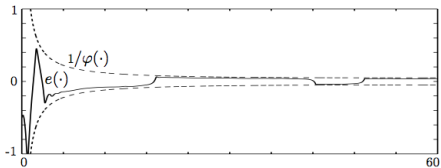
Beispiel für Relativgrad zwei

Für Relativgrad zwei sieht der Regler wie folgt aus (vereinfacht):

$$u(t) = -k(t)e(t) - (\|e(t)\|^2 + k(t)^2)k(t)^4(1 + \|\xi(t)\|^2)(\xi(t) + k(t)e(t))$$

$$k(t) = 1/(1 - \varphi(t)^2\|e(t)\|^2)$$

$$\dot{\xi}(t) = -\xi(t) + u(t)$$



Aus: Ilchmann, Ryan, Townsend 2007, SICON



Alternativer Ansatz für Relativgrad zwei

Benutze **zwei** Funnel, einen für den Fehler und einen für die Ableitung des Fehlers

Einfacheres Regelgesetz

$$u(t) = -k_0(t)^2 e(t) - k_1(t) \dot{e}(t)$$

$$k_i(t) = \frac{1}{1/\varphi_i(t) - |e(t)|}, \quad i = 0, 1$$

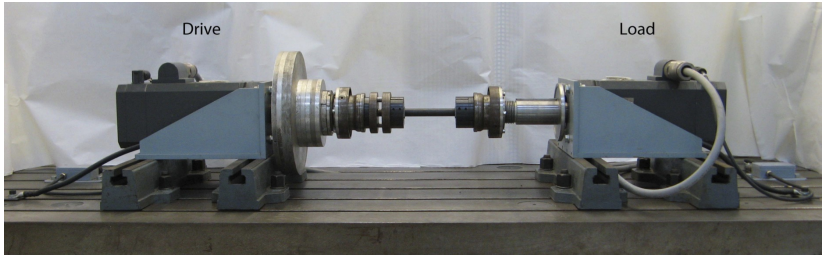
Systemklasse: $\ddot{y}(t) = f(p_f(t), T_f\{y, \dot{y}\}(t)) + g(p_g(t), T_g\{y, \dot{y}\}(t))u(t)$

Theorem (Hackl, Hopfe, Ilchmann, Mueller, Trenn 2012)

Der obige Funnel Regler für Relativgrad-Zwei-Systeme funktioniert (unter milden Annahmen an φ_0 und φ_1).



Experimentelle Verifikation



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} (u(t) + u_L(t) - (Tx_2)(t)), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),\end{aligned}$$

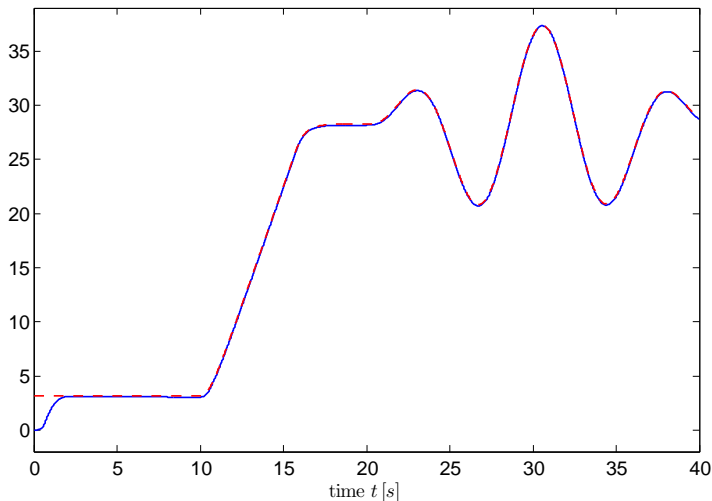
x_1 : Winkel der Rotationsmaschine

$x_2 = \dot{x}_1$: Winkelgeschwindigkeit

u_L : unbekanntes Lastmoment

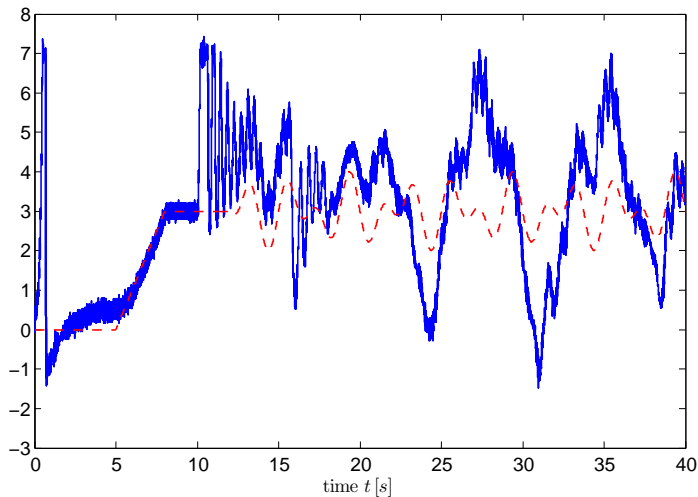
$T : \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ Reibungsoperator

Folgetrajektorienregelung im Experiment



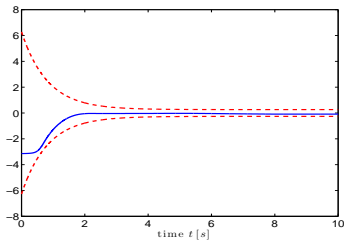
— Gemessener Winkel $y(t)$ in rad, - - - Referenzwinkel $y_{ref}(t)$ in rad

Zugehörige Stellgröße im Experiment

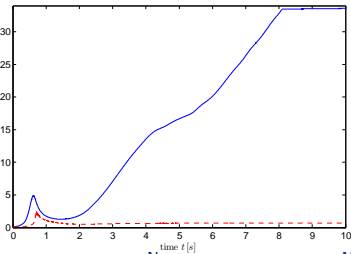


— Stellgröße $u(t)$ in Nm, - - - „Unbekannte“ Last $u_L(t)$ in Nm

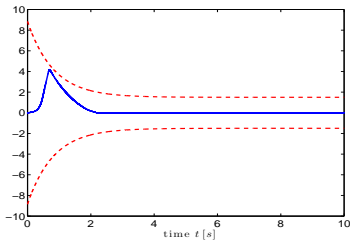
Experiment: Fehler, Verstärkung, Stellgröße



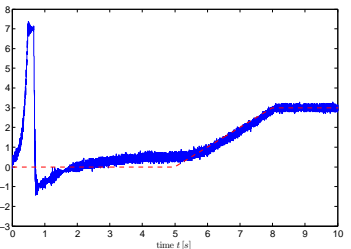
— $e(t)$ in rad, - - - $1/\varphi_0(t)$



— $k_0(t)$ in $\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$, - - - $k_1(t)$ in $\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$

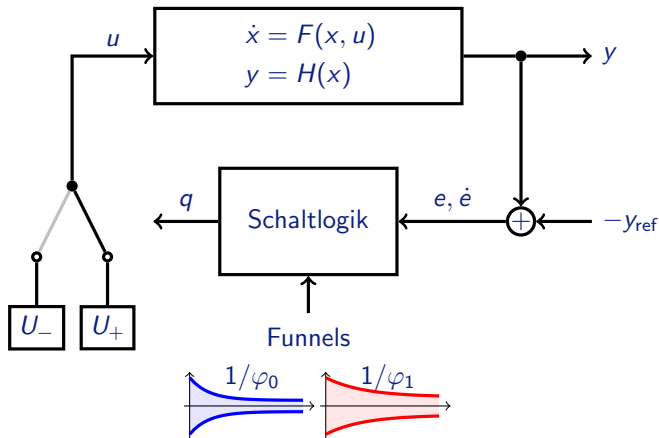


— $\dot{e}(t)$ in rad/s, - - - $1/\varphi_1(t)$

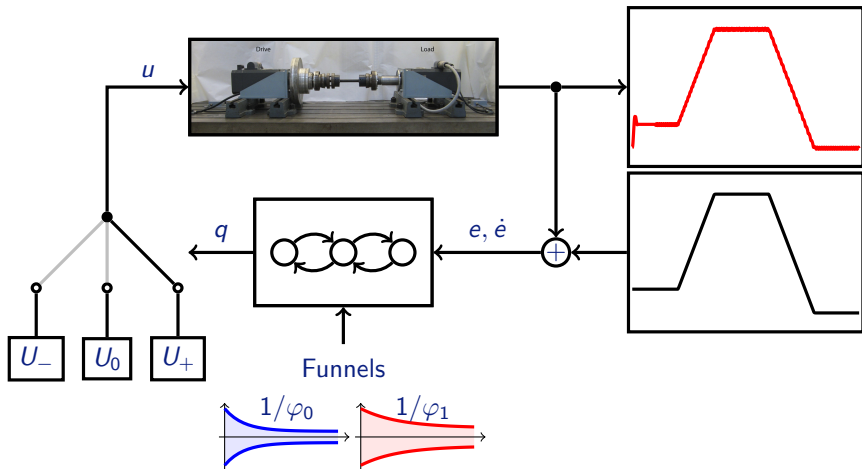


— $u(t)$ in Nm, - - - $u_L(t)$ in Nm

Bang-Bang Funnell-Regelung (Liberzon, Trenn 2010)



Bang-Bang Funnel Regelung (Liberzon, Trenn 2010)



Diese Variante: Hackl, Trenn 2012

Historische Zusammenfassung



- vor 2002: High-gain-adaptive Regelung
 - $\dot{k} = \|y\|^2$ (Morse 83; Byrnes,Willems 84; Mareels 84)
 - λ -tracking, (Ilchmann,Ryan 94, weitere Arbeiten bis 2002)
- 1991: Der Miller-Davison-„Funnel“
 - nur zwei Fehlerschranken: Überschwingen, endgültige Genauigkeit
 - $k(t)$ stückweise konstant, monoton wachsend
 - Frequenzbereichanalyse
 - Schon für beliebig hohen Relativgrad
- ab 2002: Der Funnel Regler
 - Relativgrad 1, nichtlinear, MIMO (Ilchmann,Ryan,Sangwin 2002)
 - **Eingangsbeschränkungen**, Relativgrad 1, SISO+MIMO (Ilchmann,Trenn 2004; Hopfe,Ilchmann,Ryan 2010)
 - **Höherer Relativgrad**, MIMO, via Backstepping (Ilchmann,Ryan,Townsend 2006,2007)
 - **Eingangsbeschränkungen, Relativgrad 2**, SISO (Liberzon,Trenn 2010 (Bang-Bang); Hackl,Hopfe,Ilchmann,Mueller,Trenn 2012)
 - **Bang-Bang, beliebiger Relativgrad**, SISO (Liberzon,Trenn 2013)