

Der Bang-Bang-Funnel-Regler für beliebigen Relativgrad

Stephan Trenn (gemeinsam mit Daniel Liberzon, UIUC)

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Elgersburg Workshop 2013, 14. Februar 2013, 8:45

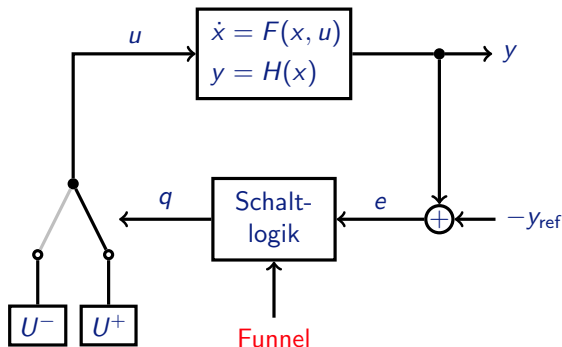


Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Relativgrad Eins
- 3 Höherer Relativgrad
 - Relativgrad Zwei
 - Verallgemeinerung auf beliebigen Relativgrad
- 4 Simulation

Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis



Referenzsignal $y_{ref} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ genügend glatt



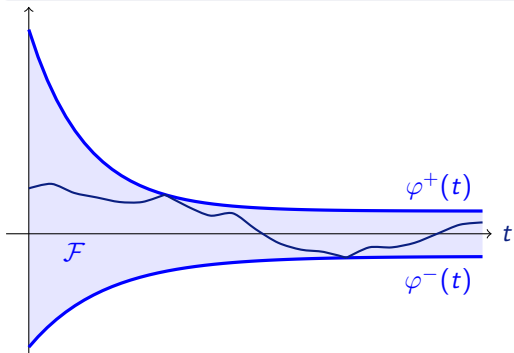
Der Funnel

Regelungsziel

Fehler $e := y - y_{\text{ref}}$ verbleibt im *Funnel*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi^-, \varphi^+) := \{ (t, e) \mid \varphi^-(t) \leq e \leq \varphi^+(t) \}$$

wobei $\varphi_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ genügend glatt



- zeitvariante Fehlerschranke
- transientes Verhalten
- praktische Konvergenz ($|e(t)| < \lambda$ für $t \gg 0$)

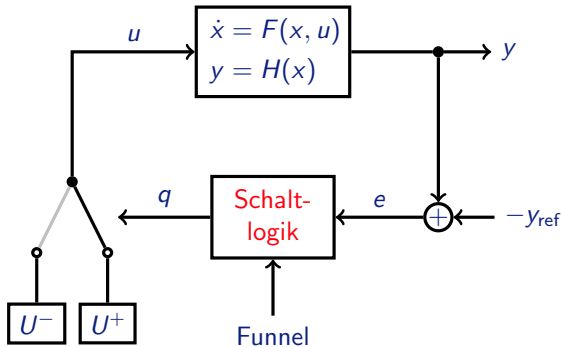


Der Bang-Bang-Funnel-Regler

Kontinuierlicher Funnel-Regler: Eingeführt von Ilchmann et al. 2002

Neuer Ansatz

Erreiche Regelziele mit **Bang-Bang-Regelung**, i.e. $u(t) \in \{U^-, U^+\}$





Relativgrad Eins

Definition (Relativgrad Eins)

$$\begin{array}{l} \dot{x} = F(x, u) \\ y = H(x) \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{l} \dot{y} = f(y, z) + \overbrace{g(y, z)}^{>0} u \\ \dot{z} = h(y, z) \end{array}$$

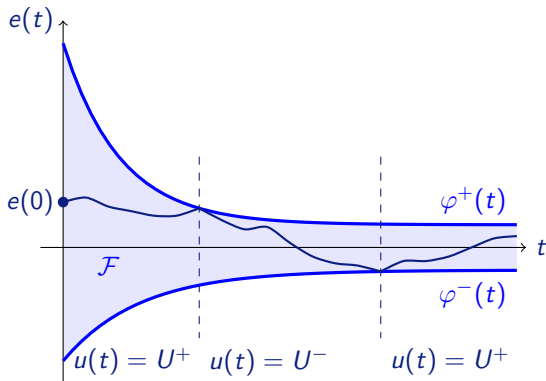
- Strukturelle Annahme
- f, g, h müssen Regler nicht bekannt sein
- Zulässigkeitsannahmen (später) formuliert mit Hilfe von f, g, h

Wichtige Eigenschaft

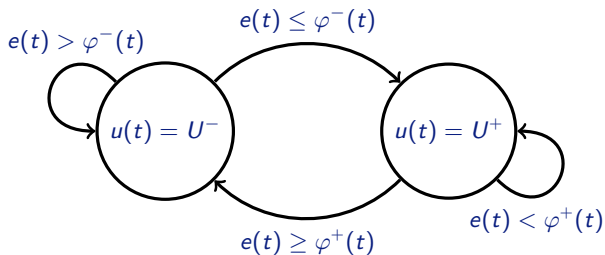
$$u(t) \ll 0 \Rightarrow \dot{y}(t) \ll 0$$

$$u(t) \gg 0 \Rightarrow \dot{y}(t) \gg 0$$

Schaltlogik



Schaltlogik



Zu einfach?

⇒ Zulässigkeitsannahmen



Zulässigkeitsannahmen

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z) + g(y, z)u, & y_0 &\in \mathbb{R} \\ \dot{z} &= h(y, z), & z_0 &\in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

$$Z_t := \left\{ z(t) \left| \begin{array}{l} z : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ löst } \dot{z} = h(y, z) \text{ für ein} \\ z^0 \in Z_0 \text{ und für ein } y : [0, t] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{mit } \varphi^-(\tau) \leq y(\tau) - y_{\text{ref}}(\tau) \leq \varphi^+(\tau) \\ \forall \tau \in [0, t] \end{array} \right. \right\}.$$

Zulässigkeitsannahmen

$$\forall t \geq 0 \quad \forall z_t \in Z_t : \quad \begin{aligned} U^- &\leq \frac{\dot{\varphi}^+(t) + \dot{y}_{\text{ref}}(t) - f(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^+(t), z_t)}{g(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^+(t), z_t)} \\ U^+ &\geq \frac{\dot{\varphi}^-(t) + \dot{y}_{\text{ref}}(t) - f(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^-(t), z_t)}{g(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^-(t), z_t)} \end{aligned}$$



Hauptresultat für Relativgrad Eins

Theorem (Bang-Bang-Funnel-Regler, Liberzon & T. 2010)

Relativgrad Eins & Funnel & einfache Schaltlogik & Zulässigkeit

⇒

Bang-bang-Funnel-Regler funktioniert:

- *Existenz und Eindeutigkeit einer globalen Lösung*
- *Fehler verbleibt im Funnel*
- *kein Zenon-Verhalten*

Notwendiges Systemwissen

- für Reglerimplementierung:
 - Relativgrad Eins
 - Signale: Fehler $e(t)$ und Funnelgrenzen $\varphi^\pm(t)$
- um Zulässigkeit zu prüfen:
 - Schranken der Nulldynamik
 - Schranken von f and g
 - Schranken von y_{ref} und \dot{y}_{ref}
 - Schranken der Funnelgrenzen

Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Relativgrad Eins
- 3 Höherer Relativgrad
 - Relativgrad Zwei
 - Verallgemeinerung auf beliebigen Relativgrad
- 4 Simulation



Relativgrad Zwei

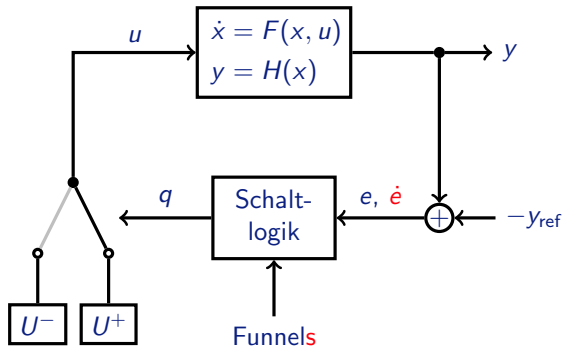
Definition (Relativgrad Zwei)

$$\begin{array}{l} \dot{x} = F(x, u) \\ y = H(x) \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{l} \ddot{y} = f(y, \dot{y}, z) + \overbrace{g(y, \dot{y}, z)}^{>0} u \\ \dot{z} = h(y, \dot{y}, z) \end{array}$$

Wesentliche Eigenschaft

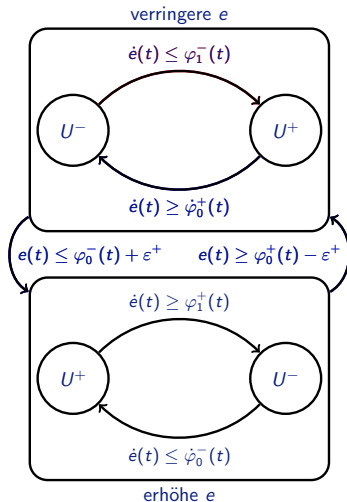
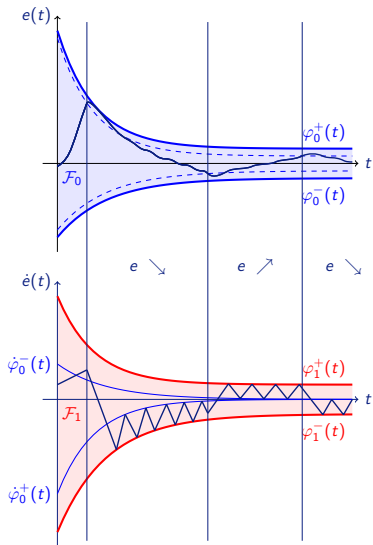
$$\begin{array}{l} u(t) \ll 0 \Rightarrow \ddot{y}(t) \ll 0 \\ u(t) \gg 0 \Rightarrow \ddot{y}(t) \gg 0 \end{array}$$

Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis





Die Schaltlogik



Relative degree r



Definition (Relative degree r)

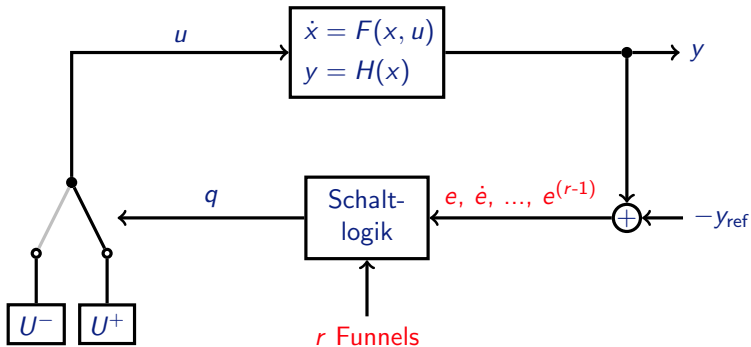
$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, u) &\cong y^{(r)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) + \overbrace{g(y, \dots, y^{(r-1)}, z)}^{>0} u \\ y = H(x) &\quad \dot{z} = h(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) \end{aligned}$$

Wesentliche Eigenschaft

$$u(t) \ll 0 \Rightarrow y^{(r)}(t) \ll 0$$

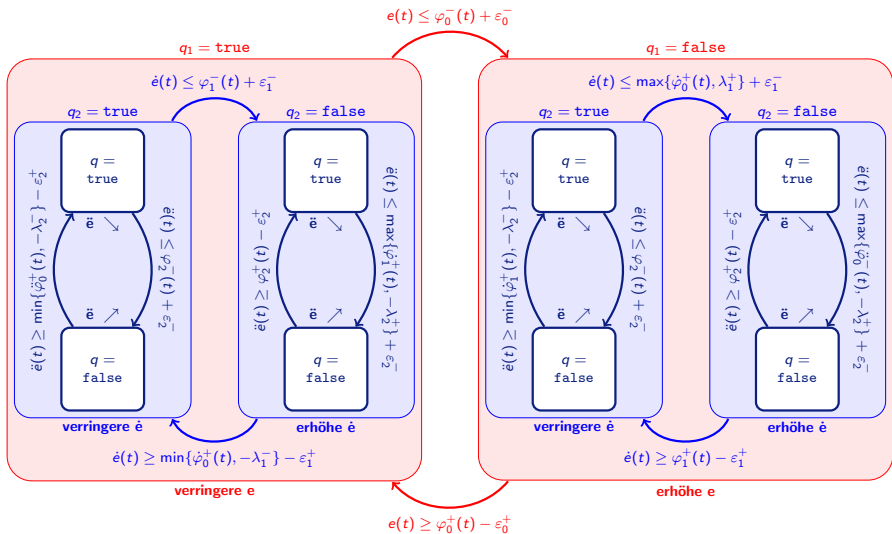
$$u(t) \gg 0 \Rightarrow y^{(r)}(t) \gg 0$$

Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis

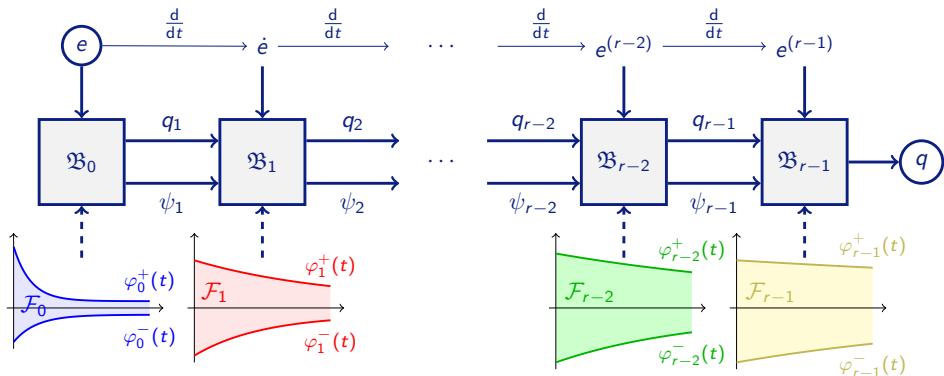




Rekursiver Ansatz, Beispiel $r = 3$



Hierarchische Schaltlogik

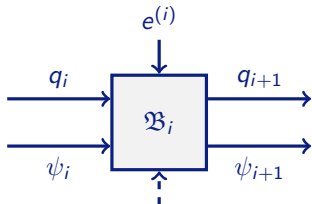


$$q_i = \text{true} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)}(t) < \min\{\psi_i(t), -\lambda_i^-\}$$

$$q_i = \text{false} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)}(t) > \max\{\psi_i(t), \lambda_i^+\}$$

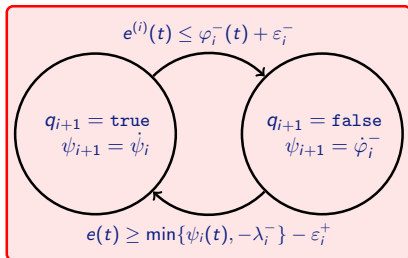


Definition der Schaltlogik



$$\varphi_i^+, \varphi_i^-, \varepsilon_i^+, \varepsilon_i^-, \lambda_i^+, \lambda_i^-$$

$q_1 = \text{true}$

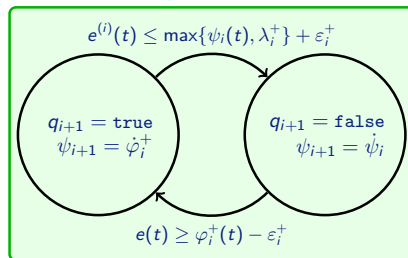


$$q_i = \text{true} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)} < \min\{\psi_i, -\lambda_i^-\}$$

$$q_i = \text{false} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)} > \max\{\psi_i, \lambda_i^+\}$$

$$\text{wobei } \psi_i \in \{\dot{\varphi}_{i-1}^\pm, \ddot{\varphi}_{i-2}^\pm, \dots, (\varphi_0^\pm)^{(i)}\}$$

$q_1 = \text{false}$



Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z1): Relativgrad r

$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, u) &\cong y^{(r)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) + \overbrace{g(y, \dots, y^{(r-1)}, z)}^{>0} u \\ y = H(x) &\quad \dot{z} = h(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z), \quad z_0 \in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-r} \end{aligned}$$

und keine endliche Entweichzeit der Nulldynamik

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z2): Referenzsignal

y_{ref} ist r mal (schwach) differenzierbar

Wegen der Relativgradannahme ist y per Definition r mal (schwach) differenzierbar, also folgt, dass e ebenfalls r mal (schwach) differenzierbar ist.

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z3): Anfangsfehler

$$e^{(i)}(0) \in [\varphi_i^-(0) + \varepsilon_i^+, \varphi_i^-(0) - \varepsilon_i^+]$$

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- **Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen**
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z4): Funnelgrenzen

- φ_i^\pm sind $r - i$ mal (schwach) differenzierbar
- φ_i^\pm und deren Ableitungen sind beschränkt

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z5): Funnels passend

- $\varphi_0^+(t) - \varepsilon_0^+ > \varphi_0^-(t) + \varepsilon_0^-$
- Für $\psi^\pm \in \{\dot{\varphi}_{i-1}^\pm, \ddot{\varphi}_{i-2}^\pm, \dots, (\varphi_0^\pm)^{(i)}\}$ und $i = 1, 2, \dots, r - 1$:
 - $\varphi_i^+(t) - \varepsilon_i^+ > \max\{\psi^-(t), \lambda_i^+\} + \varepsilon_i^-$
 - $\min\{\psi^+(t), \lambda_i^-\} - \varepsilon_i^+ > \varphi_i^-(t) + \varepsilon_i^-$

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- **Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen**
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und **minimale Wachstumsraten λ_i^\pm**
- Zur Analyse: **Einschwingzeiten Δ_i^\pm**

Zulässigkeitsannahme (Z6): Einschwingzeiten

Für $i = 0, 1, \dots, r - 1$ und $\Delta_r^\pm \geq 0$ existieren Δ_i^\pm mit

$$\Delta_i^\pm \geq \Delta_{i+1}^\pm + \frac{\|\varphi_i^+\|_\infty + \|\varphi_i^-\|_\infty}{\lambda_{i+1}^\pm}$$

echte Einschränkung folgt erst mit folgender Annahme ...

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z7): Sicherheitsabstand

Für $i = 0, 1, \dots, r - 2$ und $\psi^\pm \in \{\varphi_i^\pm, \dot{\varphi}_{i-1}^\pm, \dots, (\varphi_0^\pm)^{(i)}\}$

$$\varepsilon_i^\pm > \Delta_{i+2}^\pm \|\dot{\psi}^\pm - \varphi_{i+1}^\pm\|_\infty + \frac{(\|\dot{\psi}^\pm\|_\infty + \varphi_{i+1}^\pm\|_\infty)^2}{2\lambda_{i+2}^\mp}$$

Bemerkung: λ_r^\pm ist zusätzlicher Parameter zur Analyse und erfüllt ...

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- **Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen**
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und **minimale Wachstumsraten λ_i^\pm**
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Zulässigkeitsannahme (Z8): Letzte Wachstumsrate

$$\lambda_r^+ > \max \{ \dot{\varphi}_{r-1}^-, \ddot{\varphi}_{r-2}^-, \dots, (\varphi_0^-)^{(r)} \}$$

$$-\lambda_r^- < \min \{ \dot{\varphi}_{r-1}^+, \ddot{\varphi}_{r-2}^+, \dots, (\varphi_0^+)^{(r)} \}$$

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)



„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r - 1)$ -sten)
- Funnelgrenzen φ_i^\pm und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände ε_i^\pm und minimale Wachstumsraten λ_i^\pm
- Zur Analyse: Einschwingzeiten Δ_i^\pm

Bemerkung:

- Annahmen (Z1)-(Z8) unabhängig von U^+ und U^-
- Ebenfalls unabhängig von Systemparametern
- Für (nahezu) beliebig gegeben Funnel \mathcal{F}_0 können restliche Funnels so konstruiert werden, so dass (Z3)-(Z8) erfüllt sind



Zulässigkeitsannahme (Z9)

$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, u) &\cong y^{(r)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) + g(y, \dots, y^{(r-1)}, z)u \\ y = H(x) &\quad \dot{z} = h(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z), \quad z_0 \in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-r} \end{aligned}$$

Zulässigkeitsannahme (Z9): Eingang „stark“ genug

$$U^+ \geq \frac{\lambda_r^+ + y_{\text{ref}}^{(r)}(t) - f(y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{r-1}, z_t)}{g(y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{r-1}, z_t)}$$

$$U^- \leq \frac{-\lambda_r^- + y_{\text{ref}}^{(r)}(t) - f(y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{r-1}, z_t)}{g(y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{r-1}, z_t)}$$

for all $t \geq 0$, $(y_t^0, y_t^1, \dots, y_t^{r-1}) \in \Phi_t^{y_{\text{ref}}}$, $z_t \in Z_t^{y_{\text{ref}}}$

$$\Phi_t^{y_{\text{ref}}} := \left\{ (y_0, \dots, y_{r-1}) \mid \forall i: y_i - y_{\text{ref}}^{(i)}(t) \in [\varphi_i^-(t), \varphi_i^+(t)] \right\},$$

$$Z_t^{y_{\text{ref}}} := \left\{ z(t) \mid \begin{array}{l} z \text{ solves } \dot{z} = h(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z), z(0) = z_0 \in Z_0, \\ y \in \mathcal{C}^{r-1} \text{ with } (y(\tau), \dots, y^{(r-1)}(\tau)) \in \Phi_\tau^{y_{\text{ref}}}, \tau \in [0, t] \end{array} \right\}$$



Hauptergebnis

Theorem (Bang-Bang-Funnel-Regler funktioniert, Lib. & T. 2013)

Zulässigkeitsannahmen:

- *Strukturelle Annahmen*
 - Relativgrad r (Z1)
 - Glattheit von y_{ref} (Z2)
- *Funnels passend* (Z3)-(Z8)
- U^+ und U^- *stark genug* (Z9)

⇒ *Bang-Bang-Funnel-Regler funktioniert*

Theorem (Zulässigkeit)

Nahezu beliebiges \mathcal{F}_0 + BIBO-Nulldynamik + Beschränktheit von y_{ref}

⇒ *Zulässigkeit gegeben mit genügend großen U^+ and U^-*



Simulation for $r = 4$

Beispiel (akademisch), endliche Entweichzeit für y möglich:

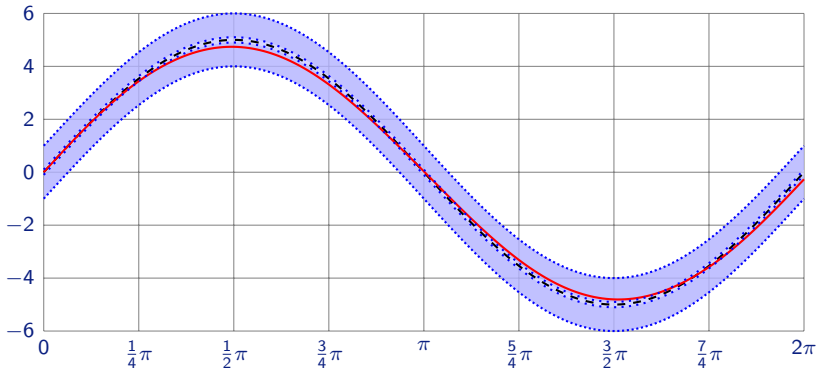
$$\begin{aligned}
 y^{(4)} &= z \ddot{y}^2 + e^z u, & y^{(i)}(0) &= y_{\text{ref}}^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, 2, 3, \\
 \dot{z} &= z(a - z)(z + b) - cy, & z(0) &= 0, \\
 y_{\text{ref}}(t) &= 5 \sin(t)
 \end{aligned}$$

Reglerparameter (konstante Funnels):

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^+ &= -\varphi_0^- \equiv 1, & \varepsilon_0^+ &= \varepsilon_0^- = 0.9, & \Delta_0^+ &= \Delta_0^- = \infty, \\
 \varphi_1^+ &= -\varphi_1^- \equiv 0.5, & \varepsilon_1^+ &= \varepsilon_1^- = 0.1, & \Delta_1^+ &= \Delta_1^- = \Delta_0^\pm / 2 = \infty, \\
 \varphi_2^+ &= -\varphi_2^- \equiv 0.5, & \varepsilon_2^+ &= \varepsilon_2^- = 0.1, & \Delta_2^+ &= \Delta_2^- = 0.4, \\
 \varphi_3^+ &= -\varphi_3^- \equiv 4.5, & \varepsilon_3^+ &= \varepsilon_3^- = 0.1, & \Delta_3^+ &= \Delta_3^- = 0.1, \\
 & & & & \Delta_4^+ &= \Delta_4^- = 0.0001.
 \end{aligned}$$

$$U^+ = -U^- = 254$$

Simulationsergebnisse, Trajektorienfolgeregelung



Schaltfrequenz: bis zu 1000 Hz

Anzahl Schaltvorgänge insgesamt: ca. 2200



Simulationsergebnisse, Fehlerplot

