

Averaging für geschaltete differential-algebraische Gleichungen

Stephan Trenn

C. Pedicini, F. Vasca, L. Iannelli (Università del Sannio, Benevento)

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Treffen des GAMM-Fachausschuss “Dynamik und Regelungstheorie”
Kaiserslautern, 28.02.2013, 14:20



Inhalt



- 1 Was ist Averaging?
- 2 Averaging für geschaltete DAEs
- 3 Averaging-Resultat für $M = 2$
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Averaging: Grundidee



geschaltetes
System



schnelles
Schalten

ungeschaltetes
Durchschnittssystem

Anwendungen

- Schnelles Schalten tritt auf bei
 - Pulsweitenmodulation
 - „Sliding mode“-Regelung
 - Generell: schnelle digitale Regler
- Vereinfachte Analyse
 - Stabilität für genügend schnelles Schalten
 - Generell: Gewünschtes Verhalten (approximativ) durch entsprechendes Schalten

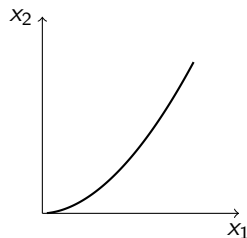
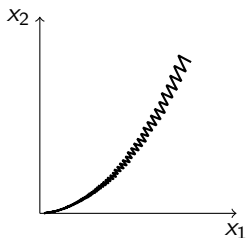
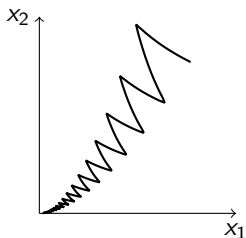
Einfaches Beispiel



Beispiel

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2\} \text{ periodisch}$$

Schaltfrequenz

 ∞ 

Zeitanteil der Systeme unabhängig von Schaltfrequenz (hier
45 : 5555 : 45)

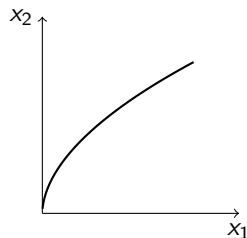
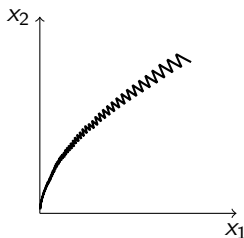
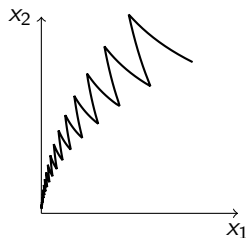
Einfaches Beispiel



Beispiel

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2\} \text{ periodisch}$$

Schaltfrequenz

 ∞ 

Zeitanteil der Systeme unabhängig von Schaltfrequenz (hier
45 : 5555 : 45)

Averaging-Ergebnis für geschaltete lineare ODEs



Betrachte geschaltete lineare ODE

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0$$

mit periodischem $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$ und **Periodenlänge** $p > 0$ und $d_1, d_2, \dots, d_M \geq 0$ mit $d_1 + d_2 + \dots + d_M = 1$ bezeichne den **zeitlichen Anteil** des jeweiligen Teilsystems pro Periode.

Theorem (BROCKETT & WOOD 1974)

Sei das **Durchschnittssystem** gegeben durch

$$\dot{x}_{\text{av}} = A_{\text{av}}x_{\text{av}}, \quad x_{\text{av}}(0) = x_0$$

und

$$A_{\text{av}} := d_1A_1 + d_2A_2 + \dots + d_MA_M.$$

Dann gilt auf jedem kompaktem Zeitintervall

$$\|x(t) - x_{\text{av}}(t)\| = O(p).$$

Geschaltete DAEs



Modellierung elektrischer Schaltungen führt zu

Geschalteten differential-algebraischen Gleichungen (DAEs)

$$E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (\text{swDAE})$$

Frage

Ist ein ähnliches Averaging-Resultat auch für geschaltete DAEs richtig?

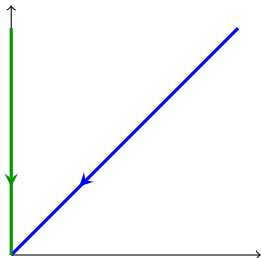
Ein Gegenbeispiel



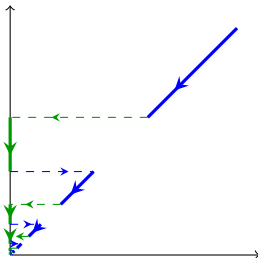
Betrachte $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ mit

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right), \quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

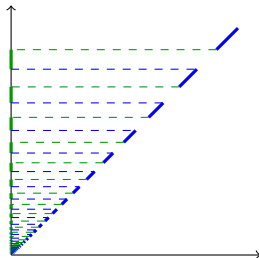
kein Schalten



langsameres Schalten



schnelles Schalten



Systemklasse

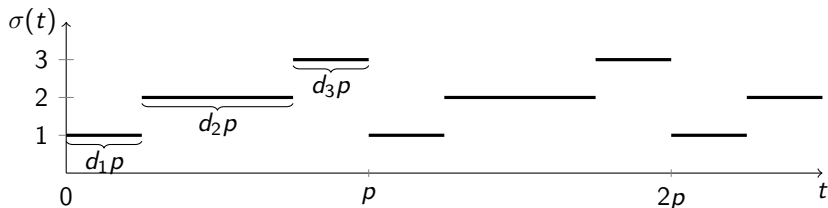


$$E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$$

(swDAE)

Annahmen

- $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$ **periodisch** mit Periode $p > 0$
- O.b.d.A.: σ auf $[0, p)$ monoton wachsend und $d_k \geq 0$ ist zeitlicher Anteil von System $k \in \{1, 2, \dots, M\}$
- Matrizenpaare (E_k, A_k) , $k \in \{1, 2, \dots, M\}$, **regulär**, d.h. $\det(sE_k - A_k) \neq 0$



Ungeschaltete DAEs: Eigenschaften



Theorem (Quasi-Weierstraß-Form, WEIERSTRASS 1868)

(E, A) *regulär* $\Leftrightarrow \exists T, S$ invertierbar:

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right), \quad N \text{ nilpotent}$$

Definition (Konsistenzprojektor)

$$\Pi_{(E,A)} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Weitere Details hierzu im nächsten Vortrag von Herrn Küsters.

Definition (Differentialprojektor und A^{diff})

$$\Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad A^{\text{diff}} := \Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} A$$

Lösungscharakterisierung von DAEs

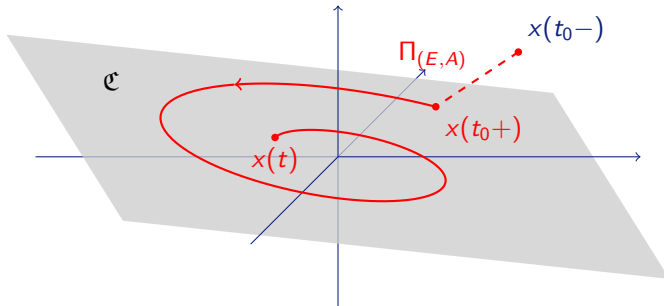


Theorem (Lösungscharakterisierung, TANWANI & T. 2010)

Betrachte DAE $E\dot{x} = Ax$ mit regulärem Matrixpaar (E, A) und zugehörigem Konsistenzprojektor $\Pi_{(E,A)}$ sowie A^{diff}

\Rightarrow

$$x(t) = e^{A^{\text{diff}}(t-t_0)} \Pi_{(E,A)} x(t_0-) \in \mathcal{C} \quad t \in (t_0, \infty).$$



Bemerkung: Bei t_0 treten im Allgemeinen noch **Dirac-Impulse** auf!

Lösungsverhalten für geschaltete DAEs



$$E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (\text{swDAE})$$

mit Konsistenzprojektoren Π_k und A_k^{diff}

Theorem (Impulsfreiheit, T. 2009)

Alle Lösungen von (swDAE) sind impulsfrei, wenn

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, M\} : E_k(I - \Pi_k)\Pi_{k-1} = 0, \quad (\text{IFB})$$

wobei $\Pi_{-1} := \Pi_M$.

Folgerung

Alle Lösungen von (swDAE) mit (IFB) sind gegeben durch

$$x(t) = e^{A_k^{\text{diff}}(t-t_k)} \Pi_k e^{A_{k-1}^{\text{diff}}(t_k-t_{k-1})} \Pi_{k-1} \dots e^{A_2^{\text{diff}}(t_3-t_2)} \Pi_2 e^{A_1^{\text{diff}}(t_2-t_1)} \Pi_1 x(t_1 -)$$

Inhalt



- 1 Was ist Averaging?
- 2 Averaging für geschaltete DAEs
- 3 Averaging-Resultat für $M = 2$**
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Bedingung an die Konsistenzprojektoren



Im folgenden sei $M = 2$.

Annahme: Kommutierende Projektoren

$$\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 \quad (\text{KP})$$

Lemma

$$(\text{KP}) \Rightarrow \text{im } \Pi_1 \Pi_2 = \text{im } \Pi_1 \cap \text{im } \Pi_2$$

Bemerkung: $\text{im } \Pi_1 \cap \text{im } \Pi_2 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ und offensichtlich muss das Durchschnittssystem, falls es existiert, ausschließlich **Lösungen im Schnitt der Konsistenzräume** haben, also wird der Projektor

$$\Pi_{\cap} := \Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1$$

eine entscheidende Rolle spielen!

Im Beispiel galt: $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_1 \neq \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1$

Hauptergebnis für $M = 2$



$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (\text{swDAE})$$

$$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 \quad (\text{KP})$$

Theorem (Averaging für geschaltete DAEs)

Betrachte impulsefreie (swDAE) mit $M = 2$ und Konsistenzprojektoren Π_1, Π_2 sowie $A_1^{\text{diff}}, A_2^{\text{diff}}$ und es gelte (KP). Das Durchschnittssystem ist

$$\dot{x}_{\text{av}} = \Pi_{\cap} A_{\text{av}}^{\text{diff}} \Pi_{\cap} x_{\text{av}}, \quad x_{\text{av}}(0) = \Pi_{\cap} x(0-)$$

mit $\Pi_{\cap} = \Pi_1\Pi_2$ und

$$A_{\text{av}}^{\text{diff}} := d_1 A_1^{\text{diff}} + d_2 A_2^{\text{diff}}.$$

Es gilt dann $\forall t \in (0, T]$

$$\|x(t) - x_{\text{av}}(t)\| = O(p)$$

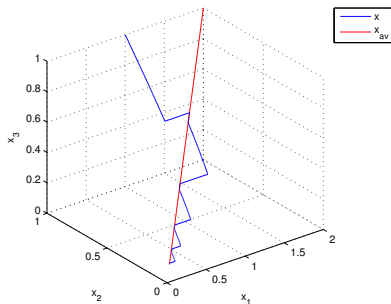
Beispiel



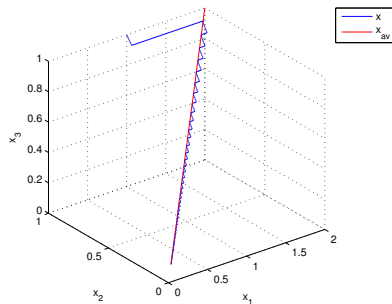
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right), (E_2, A_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_{\cap} = \Pi_2$$

$$d_1 = 0.4, \quad p = 0.2$$



$$d_1 = 0.4, \quad p = 0.02$$



Zusammenfassung und Ausblick



- Verallgemeinerung des klassischen Averaging-Resultats auf geschaltete DAEs
 - Nicht in allen Fällen existiert Durchschnittssystem
 - Zusätzliche Bedingungen an Konsistenzprojektoren nötig
- Offene Fragen
 - Kommutativität der Konsistenzprojektoren notwendig?
 - Verallgemeinerung auf mehr als zwei Systeme (in Arbeit)
 - Impulse: Konvergenz im distributionellen Sinne?