

Gemeinsame Zustands- und Schaltsignalbeobachtbarkeit

Stephan Trenn

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

gemeinsame Arbeit mit **F. Küsters** (Fraunhofer ITWM, Kaiserslautern)

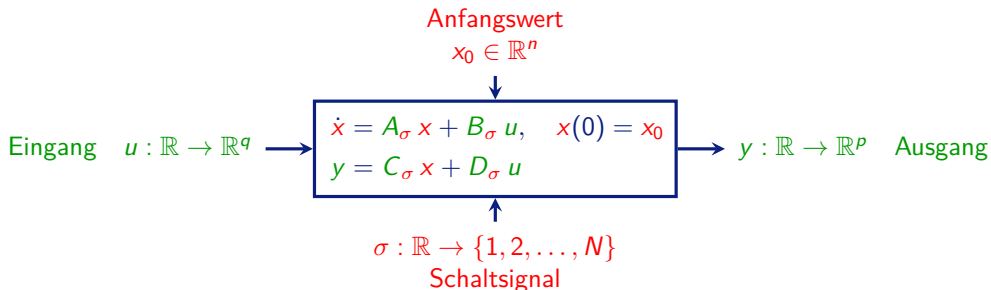
Treffen des GAMM-Fachausschuss „Dynamik und Regelungstheorie“

Anif, 21.09.2016, 17:20–17:45





Generelle Fragestellungen



Fragestellungen

- Lässt sich Zustand und Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
→ (x, σ) -Beobachtbarkeit
- Lässt sich Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
→ σ -Beobachtbarkeit
- Lassen sich Schaltzeiten eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
→ t_S -Beobachtbarkeit

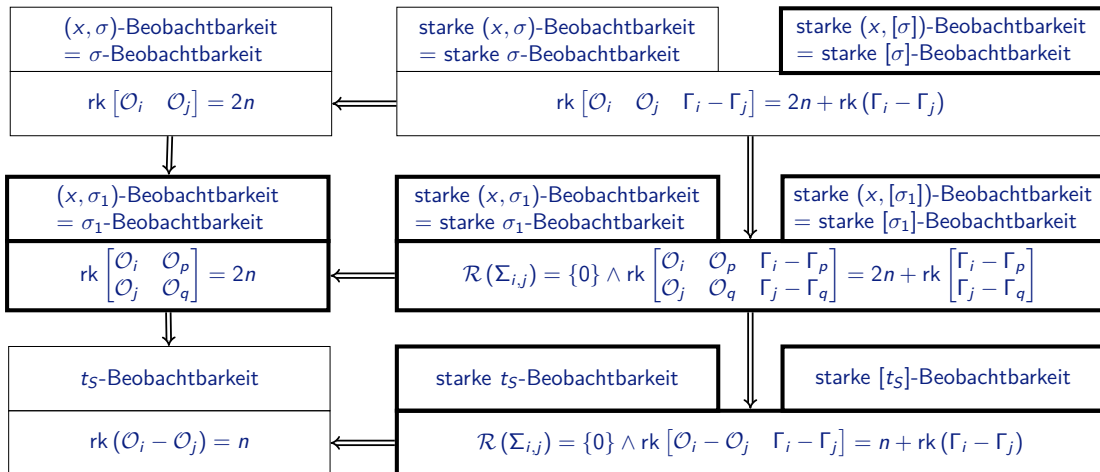
Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht



$u = 0$

u analytisch \wedge (A2)

Äquivalenzklassen für σ ,
 u glatt





(x, σ) -Beobachtbarkeit für $u = 0$

Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma)\text{-beobachtbar}$$



$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, \quad \text{wobei } \mathcal{O}_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{2n-1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi \\ y &= [C_i \quad -C_j] \xi \end{aligned} \quad \text{ist beobachtbar } \forall i \neq j$$

Schlussfolgerung

(x, σ) -Beobachtbarkeit kann auf Unterscheidbarkeit **konstanter Schaltsignale** sowie **klassische Beobachtbarkeit** jeder einzelner Moden (A_i, C_i) zurückgeführt werden



Schwächerer Beobachtbarkeitsbegriff

Problem

Annahme, dass jeder Mode beobachtbar → Für Fehlererkennungsszenarien ungeeignet

Beispiel

Normaler Betrieb

$$t < t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Fehler

$$t \geq t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Neue Definition

Geschaltetes System heißt (x, σ_1) -beobachtbar $:\Leftrightarrow$ Zustand and Schaltsignal lassen sich eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen, sofern σ nicht konstant ist.

Charakterisierung (x, σ_1) -Beobachtbarkeit



Theorem (Küsters & T. 2016)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma_1)\text{-beobachtbar}$$



$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_p^{[2n]} \\ O_j^{[2n]} & O_q^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, p \neq q, (i, j) \neq (p, q)$$

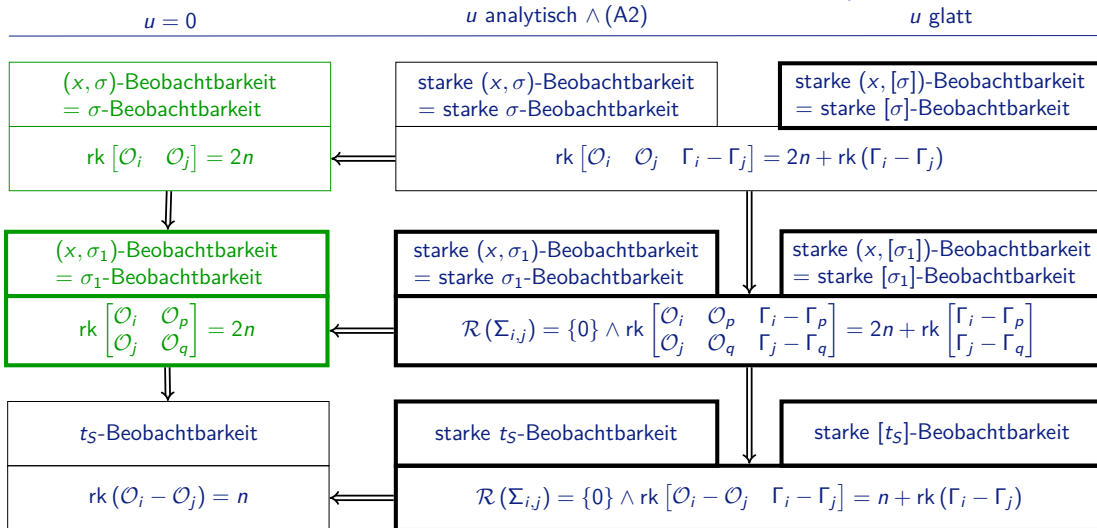
Angemessenere Bedingung

Beobachtbarkeit der individuellen Moden (A_i, C_i) wird nicht mehr benötigt!



Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für σ ,
 u glatt





Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left\{ \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei $* \in \{ (x, \sigma), \sigma, (x, \sigma_1), \sigma_1, t_S \}$ und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Zusätzliche Bedingung (A2) an B_i, D_i



Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left\{ \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei $* \in \{ (x, [\sigma]), [\sigma], (x, [\sigma_1]), [\sigma_1], [t_s] \}$ und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Betrachtung von Äquivalenzklassen von Schaltsignalen



Starke (x, σ) -Beobachtbarkeit

Annahmen

(A1) $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ **analytisch** (insbesondere $u \equiv 0$ auf Intervall $\implies u \equiv 0$ überall)

(A2) $\ker \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \\ D_i - D_j \end{bmatrix} = \{0\}$ für alle $i \neq j$

Theorem (cf. Lou & Sin 2009)

$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$
 $y = C_\sigma x + D_\sigma u$ mit (A1) und (A2) ist stark (x, σ) -beobachtbar

\iff

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j \quad \text{wobei } \Gamma_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} D & & & \\ CB & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{2n-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

Beobachtbarkeit von (A_i, C_i) ist **notwendig** für starke (x, σ) -Beobachtbarkeit



Äquivalente Schaltsignale und starke $(x, [\sigma])$ -Beobachtbarkeit

Definition (cf. Kaba 2014)

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$ ist $\sigma \stackrel{x_0, u}{\sim} \bar{\sigma} : \Leftrightarrow$

- ① $x(\cdot; x_0, u, \sigma) = x(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ② $y(\cdot; x_0, u, \sigma) = y(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ③ Für jedes Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $x(t; x_0, u, \sigma) \neq 0 \forall t \in \mathcal{I} \implies \sigma(t) = \bar{\sigma}(t) \forall t \in \mathcal{I}$

Mit entsprechender Äquivalenzklasse $[\sigma_{(x_0, u)}]$

Theorem (Küsters & T. 2016)

$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$
 $y = C_\sigma x + D_\sigma u$
 mit glattem u ist stark $(x, [\sigma])$ -beobachtbar

\Leftrightarrow

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j$$



Verbindung zur starken Beobachtbarkeit bei LTIs

Analog zum homogenen Fall betrachte

$$\Sigma_{i,j} : \begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_i & -C_j \end{bmatrix} \xi + (D_i - D_j)u \end{aligned}$$

Bemerkung

$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]})$$
$$\iff$$

$\Sigma_{i,j}$ ist stark beobachtbar, d.h. x kann nur durch y bestimmt werden (ohne Kenntnis von u)

Definition (Kontrollierbare schwach-unbeobachtbare Zustände, Trentelmann et al. 2001)

$$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \left\{ \xi_0 \in \mathbb{R}^{2n} \mid \exists u(\cdot), \exists T > 0 : \xi(T; \xi_0, u) = 0, y(\cdot; \xi_0, u) \equiv 0 \right\}$$



Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für σ ,
 u glatt

$u = 0$

u analytisch \wedge (A2)

