

# Beobachtbarkeit von geschalteten Systemen

Stephan Trenn

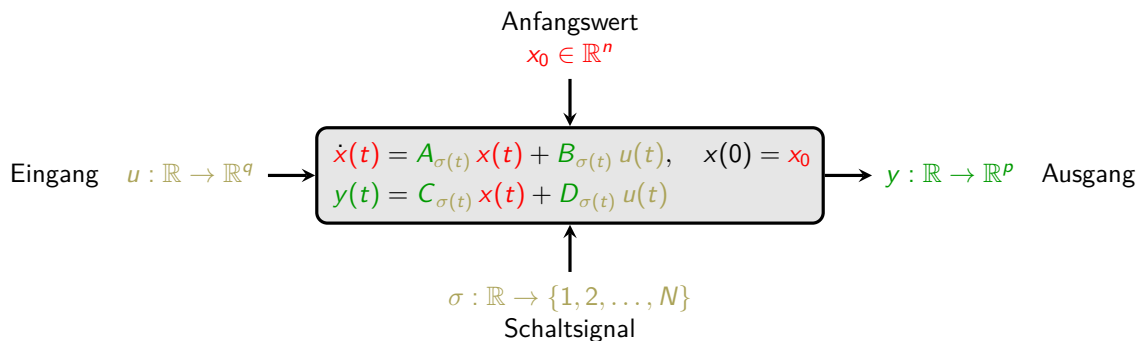
in Kooperation mit Fraunhofer ITWM Kaiserslautern und z.T. finanziert durch DFG-Projekt TR 1223/2-1

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Elgersburg Workshop 2017, 21.02.2017, 11:15



# Beobachtbarkeit



## Bekannt

Systemmatrizen  
 $(A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, \dots)$   
Ausgangssignal  $y(\cdot)$

## Gesucht

Zustand  $x(\cdot)$

## Verschiedene Rollen

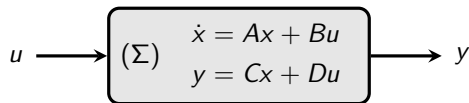
Eingangssignal  $u(\cdot)$   
Schaltsignal  $\sigma(\cdot)$

# Verschiedene Beobachtbarkeitsbegriffe

- $u$  und  $\sigma$  gegeben, fix und nicht beeinflussbar
  - **Zeitvariantes lineares System**  $\rightarrow$  Intervall-abhängige Beobachtbarkeit
  - Reduktion auf homogenen Fall ( $u = 0$ ) möglich
- $u$  und  $\sigma$  als bekannte Eingänge, beeinflussbar
  - Spezielles **nichtlineares System**  $\dot{x} = f(x, v)$ ,  $y = h(x, v)$  mit Eingang  $v = (u, \sigma)$
  - Beobachtbarkeit abhängig vom gewählten Eingang ( $u, \sigma$ )
  - Schwache, generische, starke Beobachtbarkeit
- $u$  bekannt,  $\sigma$  unbekannt
  - Moden-Beobachtbarkeit (mode-detection), Fehler-Detektion
  - Unterschiedliche Kriterien für homogenen und inhomogenen Fall
  - Schwache, generische, starke Beobachtbarkeit
- $u$  unbekannt,  $\sigma$  bekannt oder unbekannt
  - Unbekannter-Eingang-Beobachtbarkeit (UI-observability)
  - Störungs-Beobachter (disturbance observers - DOB)
  - Invertierbarkeit (bei bekanntem  $x_0$ )



# Klassische Beobachtbarkeit



## Beobachtbarkeit

$(\Sigma)$  beobachtbar  $:\Leftrightarrow \forall (x_1, u_1, y_1), (x_2, u_2, y_2)$  Lösungen:

$$(u_1, y_1) \equiv (u_2, y_2) \implies x_1 \equiv x_2$$

$\Leftrightarrow \forall (x, u, y)$  Lösungen:

$$(u, y) \equiv (0, 0) \implies x \equiv 0$$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{array} \right\}$  beobachtbar

$$\Leftrightarrow \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid Ce^{At}x_0 = 0 \forall t \in \mathbb{R} \} = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \ker \mathcal{O} = \{0\} \text{ mit } \mathcal{O} := [C/CA/CA^2/\dots/CA^{n-1}]$$

# Gliederung



- 1 Überblick
- 2  $u$  und  $\sigma$  gegeben
  - Beobachtbarkeit
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Schaltzeitenabhängigkeit vermeiden
- 3  $u$  bekannt,  $\sigma$  unbekannt
  - Übersicht
  - Der homogene Fall
  - Der inhomogene Fall
- 4 Zusammenfassung und Literatur

# Beispiel



auf  $[0, 1)$

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$y = x_1$$

auf  $[1, 2)$

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = 0$$

auf  $[2, 3)$

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$y = x_1$$

→ Tafel

## Besonderheiten

- Auf keinem kleinen Intervall beobachtbar
- Informationen zu verschiedenen Zeitpunkten müssen kombiniert werden
- Rekonstruktion abhängig von Intervalllänge

# Geschaltete Systeme mit Sprüngen



$$T_\sigma := \{ t \in \mathbb{R} \mid \sigma(t^-) \neq \sigma(t^+) \}$$

## Systemklasse

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + \cancel{B_\sigma u} && \text{auf } \mathbb{R} \setminus T_\sigma \\ x(t^+) &= \Pi_{\sigma(t^+)} x(t^-) && t \in T_\sigma \\ y &= C_\sigma x + \cancel{D_\sigma u} \end{aligned}$$

Hinzufügen von Zustandssprüngen erlaubt einfache Verallgemeinerung auf geschaltete DAEs:

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned}$$



# Einzel-Sprung-Resultat

Einzel-Sprung-Schaltsignal:  $\sigma(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

Herleitung lokaler Unbeobachtbarkeitsraum  $\rightarrow$  Tafel

$$\mathcal{M}_0 := \ker \mathcal{O}_0 \cap \ker \mathcal{O}_1 \Pi_1$$

## Lemma

Geschaltetes System mit Sprüngen ist beobachtbar  $\iff$

$$\mathcal{M}_0 = \{0\}$$

## Verallgemeinerung auf geschaltete DAEs

Für geschaltete DAEs gilt immer  $x(0^-) \in \text{im } \Pi_0$  und

$$y \equiv 0 \iff y_{(-\infty, 0)} \equiv 0 \wedge y[0] = 0 \wedge y_{(0, \infty)} \equiv 0$$

also

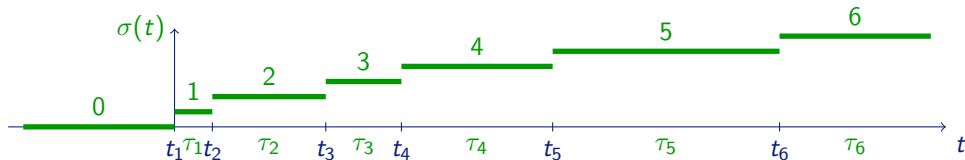
$$\mathcal{M}_0 := \text{im } \Pi_0 \cap \ker \mathcal{O}_0^{\text{diff}} \cap \ker \mathcal{O}_1^{\text{imp}} \cap \ker \mathcal{O}_1^{\text{diff}} \Pi_1$$





# Allgemeine Schaltsignale

O.B.d.A.:  $\sigma(t) = 0$  für  $t < t_1 := 0$  und  $\sigma(t) = i$  für  $i \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $\tau_i := t_{i+1} - t_i$



Für lokale Unbeobachtbarkeitsräume  $\mathcal{M}_i := \ker \mathcal{O}_{i-1} \cap \ker \mathcal{O}_i \Pi_i$  gilt:

$$y_{(t_{i-1}, t_{i+1})} \equiv 0 \quad \implies \quad x(t_i^-) \in \mathcal{M}_i$$

## Fragestellung

Finde kleinsten Unterraum  $\mathcal{M}_i^m$  mit

$$y_{(t_{i-1}, t_{m+1})} \equiv 0 \quad \implies \quad x(t_i^-) \in \mathcal{M}_i^m$$

Herleitung → Tafel

## Beobachtbarkeitscharakterisierung



$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus T_\sigma, & x(t_1^-) &= x_0 \\ x(t^+) &= \Pi_{\sigma(t^+)} x(t^-) \quad t \in T_\sigma, & y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad (\Sigma_\sigma)$$

## Theorem

$$\mathcal{M}_m^m := \mathcal{M}_m \quad \boxed{\mathcal{M}_i^m := \mathcal{M}_i \cap \Pi_i^{-1}(e^{-A_i \tau_i} \mathcal{M}_{i+1}^m)} \quad m \in \mathbb{N}, i \in \{m-1, m-2, \dots, 1\}$$

Dann gilt

$$\mathcal{M}_1^1 \supseteq \mathcal{M}_1^2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{M}_1^m \supseteq \mathcal{M}_1^{m+1} \supseteq \dots$$

und

$$\mathcal{M}_1^m \supseteq \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid y \equiv 0 \text{ in } (\Sigma_\sigma)\}$$

mit Gleichheit falls  $\sigma_{[t_m, \infty)}$  konstant. Insbesondere

$$(\Sigma_\sigma) \text{ ist beobachtbar} \iff \exists m \in \mathbb{N} : \mathcal{M}_1^m = \{0\}.$$



# Beispiel (ohne Sprünge)

auf  $[0, 1)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = x_1$$

auf  $[1, 2)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = 0$$

auf  $[2, 3)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = x_1$$

$$\ker \mathcal{O}_0 = \text{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ker \mathcal{O}_1 = \mathbb{R}^2$$

$$\ker \mathcal{O}_2 = \text{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_1 = \text{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

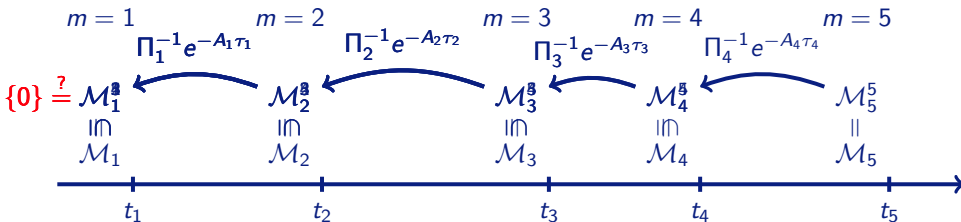
$$\mathcal{M}_2 = \text{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_1^2 = \mathcal{M}_1 \cap e^{-\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \mathcal{M}_2^2 = \text{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cap \text{im} \begin{bmatrix} \sin(1) \\ \cos(1) \end{bmatrix} = \{0\}$$



# Problematisches Beobachtbarkeitskonzept

Veranschaulichung Beobachtbarkeitstest:



## Probleme

- Ineffizienter Test
- Ungeeignet für Beobachterentwurf, da Informationsverarbeitung akausal
- Explizite Abhängigkeit von Schaltdauer



# Vorwärtsbeobachtbarkeit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u && \text{auf } \mathbb{R} \setminus T_\sigma \\ x(t^+) &= \Pi_{\sigma(t^+)} x(t^-) && t \in T_\sigma \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad (\Sigma_\sigma)$$

## Definition (Vorwärtsbeobachtbarkeit (oder Bestimmbarkeit (determinability)))

$(\Sigma_\sigma)$  ist vorwärtsbeobachtbar  $:\Leftrightarrow \exists T > 0$ :

$$y_1 \equiv y_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1(T, \infty) \equiv x_2(T, \infty)$$

Genügt wieder homogenen Fall zu betrachten und

$$\exists T > 0 : \quad \left[ y \equiv 0 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad x(T^+) = 0 \right]$$

## Bemerkung

Falls alle  $\Pi_i$  invertierbar, dann ist Vorwärtsbeobachtbar äquivalent zur Beobachtbarkeit.



# Beispiel

auf  $[0, 1)$ 

$$\dot{x} = 0$$

$$y = x_1$$

auf  $[1, 2)$ 

$$\dot{x} = 0$$

$$y = 0$$

auf  $[2, 3)$ 

$$\dot{x} = 0$$

$$y = 0$$

$$x(1^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(1^-)$$

$$x(2^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(2^-)$$

$$y \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

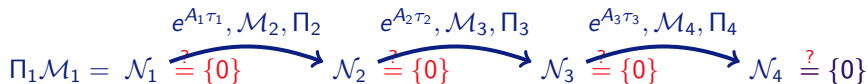
## Vorwärtsbeobachtbarkeitscharakterisierung



$$\mathcal{N}_1 := \Pi_1 \mathcal{M}_1 \quad \boxed{\mathcal{N}_{m+1} := \Pi_{m+1} (\mathcal{M}_{m+1} \cap e^{A_m \tau_m} \mathcal{N}_m)} \quad m \in \mathbb{N}$$

**Theorem**

$(\Sigma_\sigma)$  vorwärtsbeobachtbar  $\iff \exists m \in \mathbb{N}: \mathcal{N}_m = \{0\}$ .





# Invariante Unterräume

Für Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und linearer Unterraum  $\mathcal{V} = \text{im } V = \ker V^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$  sei

$$\langle A \mid \mathcal{V} \rangle := \text{im}[V, AV, A^2V, \dots, A^{n-1}V]$$

$$\langle \mathcal{V} \mid A \rangle := \ker[V^\perp / V^\perp A / V^\perp A^2 / \dots / V^\perp A^{n-1}]$$

Dann gilt

$$\forall \tau \in \mathbb{R} : \boxed{\langle \mathcal{V} \mid A \rangle \subseteq e^{A\tau} \mathcal{V} \subseteq \langle A \mid \mathcal{V} \rangle}$$

$$\mathcal{M}_i^m = \mathcal{M}_i \cap \Pi_i^{-1} (e^{-A_i \tau_i} \mathcal{M}_{i+1}^m)$$

$$\mathcal{N}_{m+1} = \Pi_{m+1} (\mathcal{M}_{m+1} \cap e^{A_m \tau_m} \mathcal{N}_m)$$

$$\overline{\mathcal{M}_i^m} := \mathcal{M}_i \cap \Pi_i^{-1} \langle A_i \mid \overline{\mathcal{M}_{i+1}^m} \rangle$$

$$\overline{\mathcal{N}_{m+1}} := \Pi_{m+1} (\mathcal{M}_{m+1} \cap \langle A_m \mid \overline{\mathcal{N}_m} \rangle)$$

$$\underline{\mathcal{M}_i^m} := \mathcal{M}_i \cap \Pi_i^{-1} \langle \underline{\mathcal{M}_{i+1}^m} \mid A_i \rangle$$

$$\underline{\mathcal{N}_{m+1}} := \Pi_{m+1} (\mathcal{M}_{m+1} \cap \langle \underline{\mathcal{N}_m} \mid A_m \rangle)$$



## Notwendige und hinreichende Beobachtbarkeitsbedingungen



$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u && \text{auf } \mathbb{R} \setminus T_\sigma \\ x(t^+) &= \Pi_{\sigma(t^+)} x(t^-) && t \in T_\sigma \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad (\Sigma_\sigma)$$

## Folgerung

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N} : \overline{\mathcal{M}}_1^m = \{0\} &\implies (\Sigma_\sigma) \text{ beobachtbar} &\implies \exists m \in \mathbb{N} : \underline{\mathcal{M}}_1^m = \{0\} \\ \exists m \in \mathbb{N} : \overline{\mathcal{N}}_m = \{0\} &\implies (\Sigma_\sigma) \text{ vorw. beob.} &\implies \exists m \in \mathbb{N} : \underline{\mathcal{N}}_m = \{0\} \end{aligned}$$

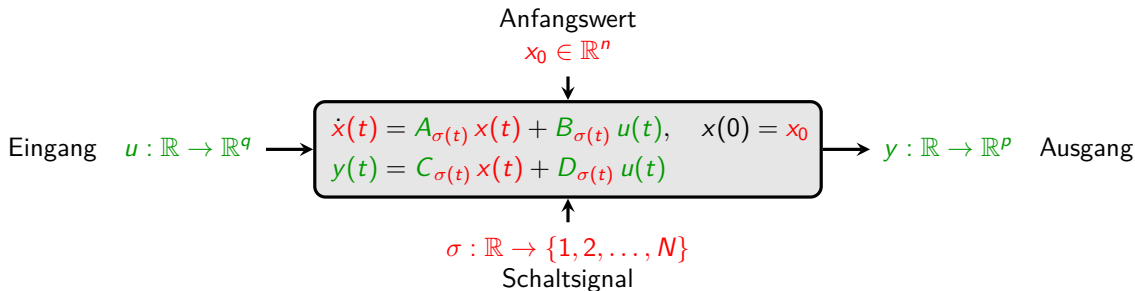
# Gliederung



- 1 Überblick
  
- 2  $u$  und  $\sigma$  gegeben
  - Beobachtbarkeit
  - Vorwärtsbeobachtbarkeit
  - Schaltzeitenabhängigkeit vermeiden
  
- 3  $u$  bekannt,  $\sigma$  unbekannt
  - Übersicht
  - Der homogene Fall
  - Der inhomogene Fall
  
- 4 Zusammenfassung und Literatur



# Verschiedene Fragestellungen



## Fragestellungen

- Lässt sich Zustand und Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit
- Lässt sich Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $\sigma$ -Beobachtbarkeit
- Lassen sich Schaltzeiten eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $t_S$ -Beobachtbarkeit

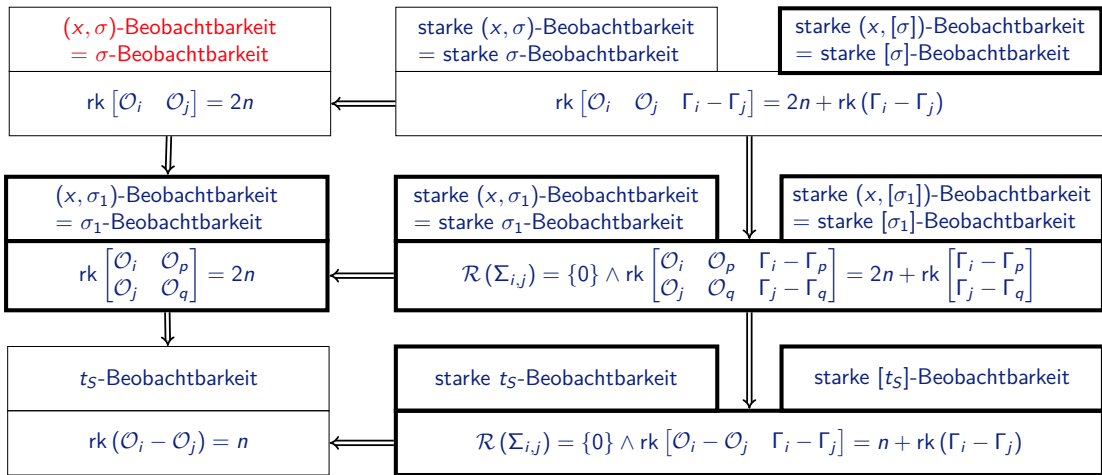


# Schalt-Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
*u* glatt

*u* = 0

*u* analytisch  $\wedge$  (A2)





# Äquivalenz von $(x, \sigma)$ - und $\sigma$ -Beobachtbarkeit

## Definition

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma)\text{-beobachtbar} \quad :\Leftrightarrow$$

$\forall$  Lösungen  $(x_1, \sigma_1, y_1), (x_2, \sigma_2, y_2)$  mit  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ :

$$y_1 \equiv y_2 \quad \Longrightarrow \quad (x_1, \sigma_1) = (x_2, \sigma_2)$$

## Lemma

$$(x, \sigma)\text{-Beobachtbarkeit} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\text{-Beobachtbarkeit}$$

“ $\Rightarrow$ ”: Klar.

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen  $(x, \sigma)$ -Unbeobachtbarkeit

$$\Rightarrow \exists (x_1, \sigma_1, y), (x_2, \sigma_2, y) \text{ mit } (x_1, \sigma_1) \neq (x_2, \sigma_2)$$

$$\Rightarrow \exists (x_1, \sigma, y), (x_2, \sigma, y) \text{ mit } x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2, \sigma, 0) \text{ ununterscheidbar von } (0, \tilde{\sigma}, 0) \quad \forall \tilde{\sigma}$$



# $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit für $u = 0$

## Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma)\text{-beobachtbar}$$



$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, \quad \text{wobei } \mathcal{O}_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{2n-1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi \\ y &= [C_i \quad -C_j] \xi \end{aligned} \quad \text{ist (klassisch) beobachtbar } \forall i \neq j$$

## Schlussfolgerung

$(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit kann auf Unterscheidbarkeit **konstanter Schaltsignale** sowie **klassische Beobachtbarkeit** jeder einzelner Moden  $(A_i, C_i)$  zurückgeführt werden

# Schwächerer Beobachtbarkeitsbegriff



## Problem

Annahme, dass jeder Mode beobachtbar  $\rightarrow$  Für Fehlererkennungsszenarien ungeeignet

## Beispiel

Normaler Betrieb

$$t < t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

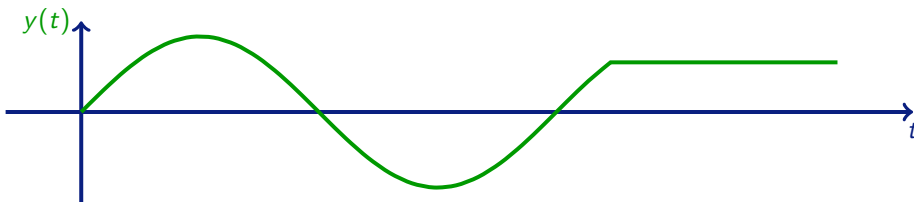
$$y = [1 \ 0] x$$

Fehler

$$t \geq t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$





# $(x, \sigma_1)$ -Beobachtbarkeit

## Neue Definition

Geschaltetes System heißt  $(x, \sigma_1)$ -beobachtbar  $:\Leftrightarrow$  Zustand und Schaltsignal lassen sich eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen, sofern  $\sigma$  nicht konstant ist.

## Theorem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma_1)\text{-beobachtbar}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_p^{[2n]} \\ O_j^{[2n]} & O_q^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, p \neq q, (i, j) \neq (p, q)$$

## Angemessenere Bedingung

Beobachtbarkeit der individuellen Moden  $(A_i, C_i)$  wird nicht mehr benötigt!





# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

$u = 0$

$u$  analytisch  $\wedge$  (A2)

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
 $u$  glatt

$(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit  
=  $\sigma$ -Beobachtbarkeit

---

$\text{rk} [\mathcal{O}_i \quad \mathcal{O}_j] = 2n$

$(x, \sigma_1)$ -Beobachtbarkeit  
=  $\sigma_1$ -Beobachtbarkeit

---

$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p \\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q \end{bmatrix} = 2n$

$t_S$ -Beobachtbarkeit

---

$\text{rk} (\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j) = n$

starke  $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit  
= starke  $\sigma$ -Beobachtbarkeit

---

$\text{rk} [\mathcal{O}_i \quad \mathcal{O}_j \quad \Gamma_i - \Gamma_j] = 2n + \text{rk} (\Gamma_i - \Gamma_j)$

starke  $(x, [\sigma])$ -Beobachtbarkeit  
= starke  $[\sigma]$ -Beobachtbarkeit

starke  $(x, \sigma_1)$ -Beobachtbarkeit  
= starke  $\sigma_1$ -Beobachtbarkeit

---

$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p & \Gamma_i - \Gamma_p \\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q & \Gamma_j - \Gamma_q \end{bmatrix} = 2n + \text{rk} \begin{bmatrix} \Gamma_i - \Gamma_p \\ \Gamma_j - \Gamma_q \end{bmatrix}$

starke  $(x, [\sigma_1])$ -Beobachtbarkeit  
= starke  $[\sigma_1]$ -Beobachtbarkeit

starke  $t_S$ -Beobachtbarkeit

---

$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \text{rk} [\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j \quad \Gamma_i - \Gamma_j] = n + \text{rk} (\Gamma_i - \Gamma_j)$

starke  $[t_S]$ -Beobachtbarkeit



# $t_S$ -Beobachtbarkeit

## Beispiel

$$\dot{x} = 0$$

$$y = x$$

$$\dot{x} = 0$$

$$y = -x$$

## Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{array}{l} \dot{x} = A_\sigma x \\ y = C_\sigma x \end{array} \text{ ist } t_S\text{-beobachtbar} \iff \text{rk}[\mathcal{O}_i^{[2n]} - \mathcal{O}_j^{[2n]}] = n \quad \forall i \neq j$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} t_S\text{-beob.} &\iff \forall \text{ sol. } \exists k \in \mathbb{N} : && y^{(k)}(t_S^-) - y^{(k)}(t_S^+) \neq 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \exists k \in \mathbb{N} : && (C_p A_p^k - C_q A_q^k)x \neq 0 \\ &\iff \text{rk}[\mathcal{O}_p^{[\infty]} - \mathcal{O}_q^{[\infty]}] = n \\ &\iff \text{rk}[\mathcal{O}_p^{[2n]} - \mathcal{O}_q^{[2n]}] = n \end{aligned}$$



# $t_S$ -Beobachtbarkeit

## Beispiel

$$\dot{x} = 0$$

$$y = x$$

$$\dot{x} = 0$$

$$y = -x$$

## Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \text{ ist } t_S\text{-beobachtbar} \iff \text{rk}[\mathcal{O}_i^{[2n]} - \mathcal{O}_j^{[2n]}] = n \quad \forall i \neq j$$

## Ordnung $2n$ notwendig

$$\text{rk}[\mathcal{O}_i^{[n]} - \mathcal{O}_j^{[n]}] = n \text{ nicht notwendig!}$$

## Beispiel ( $n = 1$ )

$$\dot{x} = 0$$

$$y = x$$

$$\dot{x} = x$$

$$y = x$$

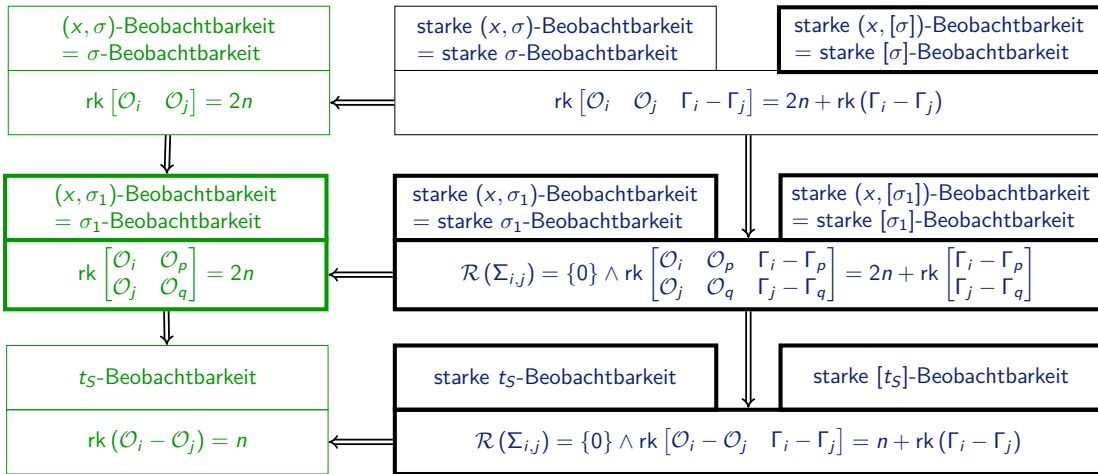


# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
*u* glatt

*u* = 0

*u* analytisch  $\wedge$  (A2)





# Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left\{ \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei  $* \in \{ (x, \sigma), \sigma, (x, \sigma_1), \sigma_1, t_S \}$  und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Zusätzliche Bedingung (A2) an  $B_i, D_i$



# Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left\{ \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei  $* \in \{ (x, [\sigma]), [\sigma], (x, [\sigma_1]), [\sigma_1], [t_s] \}$  und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Betrachtung von Äquivalenzklassen von Schaltsignalen



# Starke $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit

## Annahmen

(A1)  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  **analytisch** (insbesondere  $u \equiv 0$  auf Intervall  $\implies u \equiv 0$  überall)

(A2)  $\ker \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \\ D_i - D_j \end{bmatrix} = \{0\}$  für alle  $i \neq j$

## Theorem (cf. Lou & Si 2009)

$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$   
 $y = C_\sigma x + D_\sigma u$  mit (A1) und (A2) ist stark  $(x, \sigma)$ -beobachtbar



$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j \quad \text{wobei } \Gamma_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} D_i & & & \\ C_i B_i & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ C_i A_i^{2n-2} B_i & \cdots & C_i B_i & D_i \end{bmatrix}$$

**Beobachtbarkeit von  $(A_i, C_i)$  ist notwendig** für starke  $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit

Äquivalente Schaltsignale und starke  $(x, [\sigma])$ -Beobachtbarkeit**Definition (cf. Kaba 2014)**Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U}$  ist  $\sigma \stackrel{x_0, u}{\sim} \bar{\sigma} \iff$ 

- ①  $x(\cdot; x_0, u, \sigma) = x(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ②  $y(\cdot; x_0, u, \sigma) = y(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ③ Für jedes Intervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  gilt:  $x(t; x_0, u, \sigma) \neq 0 \forall t \in \mathcal{I} \implies \sigma(t) = \bar{\sigma}(t) \forall t \in \mathcal{I}$

Mit entsprechender Äquivalenzklasse  $[\sigma_{(x_0, u)}]$ **Theorem**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{mit glattem } u \text{ ist stark } (x, [\sigma])\text{-beobachtbar}$$

$$\iff$$

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j$$





# Verbindung zur starken Beobachtbarkeit bei LTIs

Analog zum homogenen Fall betrachte

$$\Sigma_{i,j} : \begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_i & -C_j \end{bmatrix} \xi + (D_i - D_j)u \end{aligned}$$

## Bemerkung

$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]})$$

$$\iff$$

$\Sigma_{i,j}$  ist stark beobachtbar, d.h.  $x$  kann nur durch  $y$  bestimmt werden (ohne Kenntnis von  $u$ )

## Definition (Kontrollierbare schwach-unbeobachtbare Zustände, Trentelmann et al. 2001)

$$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \left\{ \xi_0 \in \mathbb{R}^{2n} \mid \exists u(\cdot), \exists T > 0 : \xi(T; \xi_0, u) = 0, y(\cdot; \xi_0, u) \equiv 0 \right\}$$

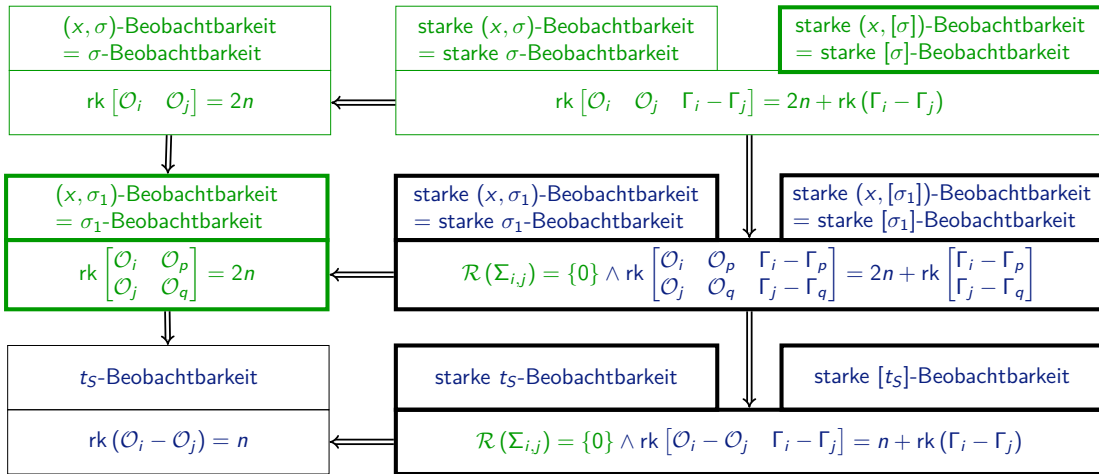


# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
*u* glatt

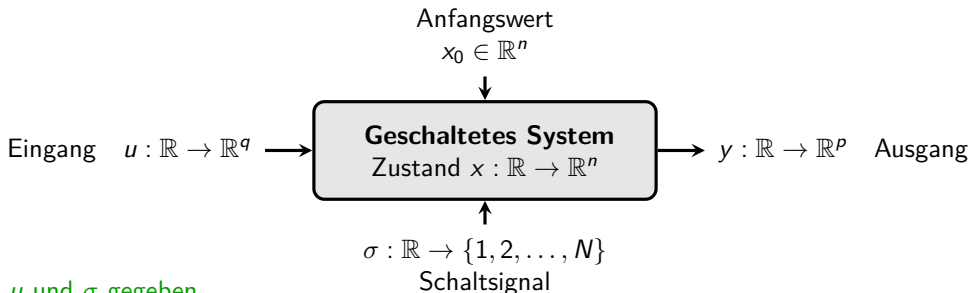
*u* = 0

*u* analytisch  $\wedge$  (A2)





# Zusammenfassung



- $u$  und  $\sigma$  gegeben

- Reduktion auf homogenen Fall möglich
- Unterscheidung zwischen Beobachtbarkeit und Vorwärtsbeobachtbarkeit
- Vollständige Charakterisierung abhängig von Schaltintervalllängen
- Notwendige und Hinreichende Bedingungen abhängig nur von Schaltsequenz


- $u$  gegeben,  $\sigma$  unbekannt

- Inhomogener Fall deutlich komplizierter
- $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit  $\iff \sigma$ -Beobachtbarkeit  $\implies x$ -Beobachtbarkeit pro Mode
- $(x, \sigma_1)$ -Beobachtbarkeit erfordert nicht Beobachtbarkeit der einzelnen Moden
- Vollständige Charakterisierung mit Hilfe von Kalman und Hankel Matrizen
- Kalman-Matrizen bis zur Ordnung  $4n$  benötigt






# Literatur

## $u$ und $\sigma$ gegeben

-  Petreczky, Tanwani and Trenn (2015): **Observability of Switched Linear Systems**  
Chapter 8 in: M. Djemai and M. Defoort (eds.), Hybrid Dynamical Systems - Observation and Control, series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag  
doi:10.1007/978-3-319-10795-0\_8

## $u$ gegeben, $\sigma$ unbekannt

-  Küsters and Trenn (2017): **Switch observability for switched linear systems**  
submitted for publication, Preprint available online
-  Vidal, Chiuso, Soatto and Sastry (2003): **Observability of linear hybrid systems**  
in: Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2003), series: Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag  
doi:10.1007/3-540-36580-X\_38
-  Lou and Si (2009): **The distinguishability of linear control systems**  
Nonlinear Analysis: Hybrid Systems  
doi:10.1016/j.nahs.2008.10.003